

DS1 - MATHS

Correction

Exercice 1.

Q1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On peut écrire

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{e^{-t/2}} = \boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x-1}e^{-t/2} = 0.}$$

par croissance comparée.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait d'après la première question que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{e^{-t/2}} = 0$. Donc il existe $T > 0$ tel que,

$$\boxed{\forall t > T, \quad \frac{t^{x-1}e^{-t}}{e^{-t/2}} \leq 1,}$$

ce qui démontre l'inégalité souhaitée.

Notons au passage que ce nombre T dépend (a priori) de x . Il faudrait donc l'écrire T_x .

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $[T, +\infty[$, positive et pour tout $t > T$, $t^{x-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$. Or l'intégrale $\int_T^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge (c'est une intégrale de référence avec $\alpha = \frac{1}{2} > 0$). Donc par comparaison, l'intégrale $\int_T^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$ converge également.

$\boxed{\text{L'intégrale converge donc pour tout } x \in \mathbb{R}.}$

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, T]$, positive et

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}.$$

Or l'intégrale

$$\int_0^T t^{x-1} dt = \int_0^T \frac{1}{t^{1-x}} dt$$

est une intégrale de Riemann en 0. Elle converge si et seulement si $1 - x < 1$, c'est-à-dire quand $x > 0$.

Par équivalence, $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^T t^{x-1}e^{-t} dt \text{ converge si et seulement si } x > 0.}$

(e) L'intégrale $\Gamma(x)$ est impropre en 0 et en $+\infty$. On sépare cette intégrale en T .

Le côté $+\infty$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ (question Q1.c).

Le côté 0 converge pour $x > 0$ (question Q1.d).

$\Gamma(x)$ converge donc si et seulement si $x > 0$. Ainsi, $\boxed{D_\Gamma =]0, +\infty[.}$

Q2. (a) On va procéder à une intégration par parties. Fixons nous d'abord des bornes d'intégration loin des problèmes : $0 < a < b < +\infty$, pour travailler sur un intervalle fermé.

Posons $u(t) = t^x$ et $v(t) = -e^{-t}$. On a alors $u'(t) = xt^{x-1}$ et $v'(t) = e^{-t}$.

L'intégrale devient alors

$$\int_a^b t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t} \right]_a^b - \int_a^b -xt^{x-1} e^{-t} dt = (a^x e^{-a} - b^x e^{-b}) + x \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt$$

Quand on fait tendre a vers 0 puis b vers $+\infty$, on obtient d'un côté $\Gamma(x+1)$ et de l'autre $\Gamma(x)$ pour les intégrales. Il reste la parenthèse à gérer. Or $\lim_{a \rightarrow 0^+} a^x e^{-a} = 0$ (aucun problème ici) et $\lim_{b \rightarrow +\infty} b^x e^{-b} = 0$ (par croissance comparée).

Le résultat est donc bien démontré : $\boxed{\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}.$

(b) Montrons le résultat attendu par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

initialisation : Calculons $\Gamma(1)$: Soient $0 < a < b$

$$\int_a^b t^0 e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_a^b = e^{-a} - e^{-b}.$$

Or $\lim_{a \rightarrow 0^+} e^{-a} = 1$ et $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-b} = 0$. Donc $\Gamma(1) = 1 = 0!$.

hérédité : Supposons que la formule soit vraie pour un $n > 0$ fixé et démontrons la au rang $n+1$:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \times (n-1)! = n!.$$

(la première égalité vient de la question précédente, la deuxième est l'hypothèse de récurrence)

La récurrence est établie : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!}$

Q3. Nous allons procéder à un changement de variable. Pas besoin de tronquer l'intervalle ici, puisque la méthode s'applique sur une intégrale généralisée. De plus, on sait que l'intégrale converge.

Posons $t = -\ln(s) \iff s = e^{-t}$. On a alors $dt = -\frac{ds}{s}$.

De plus, quand t tend vers 0, s tend vers 1 et quand t tend vers $+\infty$, s tend vers 0. On a alors :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_1^0 -(-\ln(s))^{x-1} \cdot s \cdot \frac{ds}{s} = \int_0^1 (-\ln(s))^{x-1} ds.}$$

Exercice 2.**Q4.** Cette affirmation est **fausse**.

Il se peut que les vecteurs soient liés. Par exemple, $\text{Vect}(1, X, 2X, 3X, 4X, \dots) = \text{Vect}(1, X)$.
 Pour que ce soit vrai, il faudrait rajouter l'hypothèse que la famille infinie est libre.

Q5. Cette affirmation est **fausse**.

En effet, considérons la fonction $f(x) = x - 1/2$. Elle est bien non identiquement nulle, et pourtant,

$$\int_0^1 f(t)dt = 0 = \left[t^2/2 - t/2 \right]_0^1 = 0$$

Pour que ce soit vrai, il faudrait rajouter une hypothèse, par exemple la positivité de la fonction f .

Q6. Cette affirmation est **vraie**.

C'est par exemple le cas de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q7. Cette affirmation est **fausse**.

Par exemple, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n} \right)_{n>0}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ mais elle ne sera jamais monotone car son signe alterne.

Exercice 3.**Q8.** Pour le calcul de $\det(D)$, il y a une certaine symétrie avec x et y . Nous allons donc en profiter et effectuer des opérations en parallèle :

$$\begin{aligned} \det(D) &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} -x & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -y & -y \\ 1 & 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_4}{=} \begin{vmatrix} -x & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -y & -y \\ 1 & 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(\text{linéarité 1ère et 3ème ligne})}{=} (-x)(-y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(D) &\stackrel{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{C_4 \leftarrow C_4 - C_3} = xy \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & y \end{vmatrix} \\
&\stackrel{\text{(linéarité 2ème et 4ème colonne)}}{=} x^2 y^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} (xy)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{(déterminant triangulaire)}}{=} (xy)^2
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\det(D) = (xy)^2}$.

Q9. La matrice D est inversible si et seulement si $\det(D) \neq 0$ donc

$\boxed{D \text{ est inversible si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont non nuls.}}$

Q10. D'après la question précédente, pour $x = 1$ et $y = -1$, la matrice D est inversible. Son noyau est donc réduit à zéro : $\boxed{\ker D = \{0\}}$