Corrigé du DM n°5

Correction 1.

(a) $m = \dfrac{1-1}{4-(-2)} = 0$ donc $f(x) = p$. Or $f(-2) = 1$ donc $p = 1$ donc $\boxed{f(x) = 1}$.

(b) $m = \dfrac{-4+5}{-1-3} = \dfrac{1}{-4}$ donc $f(x) = -\frac{1}{4}x + p$. Or $f(3) = -5$ donc $-5 = -\frac{3}{4} + p$ donc $p = -\frac{17}{4}$.
Donc $\boxed{f(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{17}{4}}$.

Correction 2.

- Étude de A :
  - ⋆ $-\frac{b}{2a} = \frac{12}{4} = 3$ et $a = 1 > 0$ donc $\boxed{A \text{ est décroissante sur }]-\infty, 3] \text{ et croissante sur } [3, +\infty[}$.
  - ⋆ $\Delta = -8$ donc $r_1 = \frac{12 - i\sqrt{8}}{2\times 2} = \frac{12 - i2\sqrt{2}}{4} = 3 - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et r_2 est le conjugué donc $r_2 = 3 + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
    $\boxed{\text{les racines sont } r_1 = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ et } r_2 = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}i}$.
  - ⋆ A n'a pas de racine réelle, et $a > 0$ donc $\boxed{A(x) \text{ est strictement positive pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}}$
  - ⋆ Pas de factorisation sur $\mathbb{R}$.
- Étude de B : (*réponses seulement*)
  - ⋆ $\boxed{B \text{ est croissante sur }]-\infty, 2] \text{ et décroissante sur } [2, +\infty[}$.
  - ⋆ $\Delta = 4$ et $\boxed{\text{les racines sont } r_1 = 3 \text{ et } r_2 = 1}$.
  - ⋆ $\boxed{B(x) \text{ est strictement positive sur }]1, 3[\text{ et strictement négative sur }]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[}$.
  - ⋆ Forme factorisée : $\boxed{B(x) = -(x-1)(x-3)}$.
- Étude de C : (*réponses seulement*)
  - ⋆ $\boxed{C \text{ est décroissante sur }]-\infty, -\frac{5}{2}] \text{ et croissante sur } [-\frac{5}{2}, +\infty[}$.
  - ⋆ $\Delta = \frac{9}{4}$ et $\boxed{\text{les racines sont } r_1 = -4 \text{ et } r_2 = -1}$.
  - ⋆ $\boxed{C(x) \text{ est strictement positive sur }]-\infty, -4[\cup]-1, +\infty[\text{ et strictement négative sur }]-4, -1[}$.
  - ⋆ Forme factorisée : $\boxed{C(x) = \frac{1}{2}(x+4)(x+1)}$.

Correction 3.

- f est une fraction rationnelle, on cherche les racines de son dénominateur :
  $\Delta = 7^2 - 4\times(-1)\times(-1) = 49 - 4 = 45 = 9\times 5$
  $r_1 = \dfrac{-7 - \sqrt{9\times 5}}{2\times(-1)} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ $\qquad$ $r_2 = \dfrac{-7 + \sqrt{9\times 5}}{2\times(-1)} = \dfrac{7}{2} - \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.
  Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}\right\}}$.
- $g = \ln \circ u$ avec $u(x) = 2x^2 - 3x + \frac{9}{8}$
  - ⋆ $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}$ (polynôme)
  - ⋆ $\mathcal{D}_{\ln} =]0, +\infty[$
    On résout $u(x) > 0$:
    $\Delta = (-3)^2 - 4\times 2\times\dfrac{9}{8} = 9 - 9 = 0$
    $r_1 = \dfrac{3}{4}$ donc $u(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$.
    Donc $u(x) > 0 \iff x \neq \frac{3}{4}$.
  Donc $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{4}\right\}}$.

Correction 4. réponses

1. $P(-4) = 0$ puis $P(x) = (x+4)(-2x^2 + 4x + 30)$ et enfin $\boxed{P(x) = -2(x+4)(x+3)(x-5)}$.

2. $Q(2) = 0$ et $Q(x) = (x-2)(3x^2 - 12x + 12)$ puis $\boxed{Q(x) = 3(x-2)^3}$.