Devoir Surveillé n°1
Samedi 10 octobre, 8h - 12h

Calculatrice interdite.

Le sujet comporte 2 pages et une annexe recto-verso à rendre avec la copie.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La notation prendra en compte la présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction (lexique, syntaxe).
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1. Calculs.

1. On suppose que A, B, C et D sont non nuls et que le problème a une solution.
On sait que $5D = \dfrac{\frac{A}{BC} + \frac{D}{C}}{\frac{AC}{BD} + \frac{BA}{C}}$, exprimer D sous la forme la plus factorisée possible.

2. Pour x et y non nuls et $x \neq y$ et $x \neq -y$, simplifier $\dfrac{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}$.

3. Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 + mx - 1$.

(a) Pour quelle valeur de m le polynôme P est-il divisible par $(x-2)$?

(b) En remplaçant m par cette valeur, effectuer la division et déterminer le quotient.

4. Soit $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 38x^2 - 8x + 120$.
Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $(2x^2 - 2x - 12)$.
Factoriser alors au maximum $P(x)$ et donner toutes ses racines.

5. Simplifier $A(x) = \cos(3\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(-\frac{3\pi}{2} - x)$.

6. Montrer que $\sin(3x) = \sin(x)(2\cos(2x) + 1)$.

7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $\cos(3x) = \cos(x + \frac{3\pi}{4})$

(b) $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{3}$ *(on pourra mettre le membre de gauche sous forme $A\cos(\omega x - \varphi)$)*

Exercice 2.

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$f(x) = \ln(3x+2) \times \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $g(x) = \left(\dfrac{7x-5}{3x+4}\right)^3$ $\qquad$ $h(x) = \dfrac{\sqrt{-2x+7}}{x-3}$

Exercice 3.

On note $A = \Big\{\big(2\cos(\theta), \sin(\theta)\big),\ \theta \in \mathbb{R}\Big\}$ et $B = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 = 4\Big\}$.

1. Donner sans justifier un élément de A puis un élément de B.

2. Montrer que $A \subset B$.

3. On admet que $B \subset A$. Que peut-on conclure ?

Exercice 4.



On se place sur une planète, dont l'accélération de la pesanteur est environ cinq fois moins forte que sur terre. À instant $t = 0$, on lance un projectile, depuis une hauteur de 3 mètres, vers le haut, avec une vitesse v.
La hauteur du projectile au-dessus du sol, à l'instant t est donnée par :

$$h(t) = -t^2 + vt + 3$$

1. Dans cette question, on prend $v = 1m.s^{-1}$, ainsi, $h(t) = -t^2 + t + 3$.

(a) Mettre h sous forme canonique.
En déduire l'allure de la courbe représentative de h (on expliquera la démarche pour le tracé).
Préciser la hauteur maximale atteinte.

(b) Déterminer (par le calcul) l'instant t_0 où le projectile atteint le sol.

2. On souhaite que le projectile atteigne une hauteur d'au moins 5 mètres avant de retomber.
Déterminer les valeurs de v compatibles avec ce critère.

Bonus. On souhaite que le projectile n'atteigne pas le sol avant l'instant $t = 3s$.
Déterminer les valeurs de v réalisant la condition souhaitée.

Exercice 5.

Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ x+2 \\ 2x \end{pmatrix}$.
Déterminer dans chaque cas, lorsque c'est possible, la ou les valeurs de x qui réalisent la condition.

1. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ soient orthogonaux.

2. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux.

3. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ soient colinéaires.

4. $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ soient coplanaires.

Exercice 6.

Soient A, B et C trois points du plan qui forment un triangle non aplati.
On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, et $p = \frac{a+b+c}{2}$, et enfin $\mathcal{A}$ sera l'aire du triangle ABC.
Le but de l'exercice est d'établir une formule pour l'aire à partir des longueurs des côtés.

1. Justifier que l'aire du triangle ABC est, au signe près, $\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
En déduire que $\mathcal{A} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right)^2}$.

2. En calculant de deux manières différentes $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$, démontrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$.

3. Rappeler la définition du déterminant de deux vecteurs du plan $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ puis du produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
En déduire que $(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))^2 + (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2 = b^2c^2$.

4. En utilisant les questions précédentes, démontrer que $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

5. Application : on donne $AB = 5$cm, $BC = 7$cm et $AC = 8$cm, donner la valeur exacte de l'aire du triangle.

Bonus : Démontrer que $\dfrac{\sin(\widehat{BAC})}{a} = \dfrac{\sin(\widehat{ABC})}{b} = \dfrac{\sin(\widehat{BCA})}{c}$.

Nom - Prénom :

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 7.

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.

1. Pour chacun des ensembles suivants, cocher la case qui correspond :

$\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leqslant 1\} = \ldots$	☐ $\{0\}$	☐ $\emptyset$	☐ autre : ...
$\{n \in \mathbb{N} \,|\, n < 2 \text{ et } n \text{ est pair}\} = \ldots$	☐ $\{0\}$	☐ $\emptyset$	☐ autre : ...
$\{n \in \mathbb{N} \,|\, \text{pour tout } m \text{ de } \mathbb{N},\ n \leqslant m\} = \ldots$	☐ $\{0\}$	☐ $\emptyset$	☐ autre : ...
$\{n \in \mathbb{N} \,|\, \text{pour tout } m \text{ de } \mathbb{N},\ n < m\} = \ldots$	☐ $\{0\}$	☐ $\emptyset$	☐ autre : ...
$\{x \in \mathbb{R} \,|\, \text{pour tout } m \text{ de } \mathbb{N},\ x < m\} = \ldots$	☐ $\{0\}$	☐ $\emptyset$	☐ autre : ...
$\{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 + x = 1\} = \ldots$	☐ $\{0\}$	☐ $\emptyset$	☐ autre : ...
$\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n^2 \leqslant 0\} = \ldots$	☐ $\{0\}$	☐ $\emptyset$	☐ autre : ...

2. Pour toutes parties A et B d'un ensemble E, $(A \backslash B) \cup B = A$: Vrai ☐ Faux ☐

3. On note $E = \{1\}$.

$\mathcal{P}(E) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4. Donner deux éléments de chacun des ensembles suivants :

$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x + 3y = 1\right\}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left\{2x + 3y,\ (x, y) \in [\![1, 4]\!] \times]0, 1[\ \right\}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \ldots$

☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \ldots$

☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \ldots$

☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 8.

Soit une fonction f définie sur $[-6;6]$ ayant pour tableau de variations :

x	-6		-1		0		1		6
$f(x)$	-10	↗	3	↘	1	↗	5	↘	-1

Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition et remplir le tableau de variation. Aucune justification n'est attendue.

1. $g(x) = f(x) + 2$

$\mathcal{D}_g = \dots$

x	
$g(x)$	

2. $h(x) = f(x+4)$

$\mathcal{D}_h = \dots$

x	
$h(x)$	

3. $k(x) = -3f(x)$

$\mathcal{D}_k = \dots$

x	
$k(x)$	

4. $\ell(x) = f(\frac{1}{2}x)$

$\mathcal{D}_\ell = \dots$

x	
$\ell(x)$	