Corrigé du DS n°1

Correction 1.

1. $5D = \dfrac{\frac{A}{BC}+\frac{D}{C}}{\frac{AC}{BD}+\frac{BA}{C}} \iff 5D\left(\frac{AC}{BD}+\frac{BA}{C}\right) = \frac{A}{BC}+\frac{D}{C}$

$\iff 5\frac{AC}{B}+5\frac{BA}{C}D = \frac{A}{BC}+\frac{D}{C}$

$\iff (5\frac{BA}{C}-\frac{1}{C})D = \frac{A}{BC}-5\frac{AC}{B}$

$\iff (5B^2A-B)D = A-5AC^2$ (on a multiplié par BC des deux côtés)

$\iff \boxed{D = \dfrac{A(1-5C^2)}{B(5BA-1)}}$

2.
$$\frac{\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}} = \frac{\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}}{\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}}$$
$$= \frac{x^2+2xy+y^2+(x^2-2xy+y^2)}{(x-y)(x+y)} \times \frac{(x-y)(x+y)}{x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy+y^2)}$$
$$= \frac{2x^2+2y^2}{4xy}$$
$$= \boxed{\frac{x^2+y^2}{2xy}}$$

3. **(a)** P est divisible par $(x-2)$ si 2 est racine de P.
Or $P(2) = 2^3+2\times 2^2+m\times 2-1 = 15+2m$.
Et $15+2m=0 \iff 2m=-15 \iff m=-\frac{15}{2}$.
Donc $\boxed{P \text{ est divisible par } (x-2) \text{ pour } m=-\frac{15}{2}}$.

(b) Alors *par division euclidienne* on trouve que le quotient est $\boxed{x^2+4x+\frac{1}{2}}$.

4. *On pose la division euclidienne,* on trouve $P(x) = (2x^2-2x-12)(x^2+3x-10)$.

- on factorise $2x^2-2x-12$:
  $\Delta = (-2)^2-4\times 2\times(-12) = 100$
  donc $r_1 = \frac{2-10}{4} = -4$ et $r_2 = \frac{2+10}{-4} = -3$
  donc $2x^2-2x-12 = 2(x+4)(x+3)$.
- on factorise $x^2+3x-10$:
  $\Delta = 3^2+40 = 49$
  donc $r_1 = \frac{-3-7}{2} = -5$ et $r_2 = \frac{-3+7}{2} = 2$
  donc $x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$

Donc $\boxed{P(x) = 2(x+4)(x+3)(x+5)(x-2)}$.

$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont } -5,-4,-3 \text{ et } 2.}$

5. $A(x) = \cos(2\pi+\pi-x)-\sin(x)-\sin(\frac{3\pi}{2}+x)$
$= \cos(\pi-x)-\sin(x)-\sin(\pi+\frac{\pi}{2}+x)$
$= \cos(x)-\sin(x)+\sin(\frac{\pi}{2}+x)$
$= \boxed{2\cos(x)-\sin(x)}$

6. $\sin(3x) = \sin(x+2x)$
$= \sin(x)\cos(2x) + \cos(x)\sin(2x)$
$= \sin(x)\cos(2x) + 2\cos(x)\sin(x)\cos(x)$
$= \sin(x)(\cos(2x) + 2\cos^2(x))$
$= \sin(x)(\cos(2x) + 1 + \cos(2x))$ car $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
$\boxed{\sin(3x) = \sin(x)(2\cos(2x)+1)}$

7. **(a)** $\cos(3x) = \cos(x + \frac{3\pi}{4}) \iff$ il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $3x = x + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$
ou $3x = -(x + \frac{3\pi}{4}) + 2k\pi$

- $3x = x + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \iff 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \iff x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$
- $3x = -(x + \frac{3\pi}{4}) + 2k\pi \iff 3x = -x - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \iff 4x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \iff x = -\frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

(b) $A = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$
On cherche φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On peut prendre $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.
Ainsi, $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{3} \iff 2\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$
$\iff \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6})$
$\iff$ il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$
ou $x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$
$\iff$ il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
(car $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi-2\pi}{6} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$)
$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

Correction 2.

- $f = (f_1 \circ f_2) \times f_3$ avec $f_1(x) = \ln(x)$ et $f_2(x) = 3x + 2$ et $f_3(x) = \frac{1}{x^2}$
$\star$ $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}$ et $f_2(x) \in \mathcal{D}_{f_1} \iff 3x + 2 > 0 \iff 3x > -2 \iff x > -\frac{2}{3}$
donc $\mathcal{D}_{f_1 \circ f_2} =]-\frac{2}{3}, +\infty[$
$\star$ $\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
Donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\frac{2}{3}, 0[\cup]0, +\infty[}$.

- $g = g_1 \circ g_2$ avec $g_1(x) = x^3$ et $g_2(x) = \dfrac{7x-5}{3x+4}$.
$\star$ g_2 est une fraction rationnelle et $3x + 4 \neq 0 \iff x \neq -\frac{4}{3}$ donc $\mathcal{D}_{g_2} = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{4}{3}\right\}$.
$\star$ g_1 est défini sur $\mathbb{R}$ donc $g_2(x) \in \mathcal{D}_{g_1}$ est toujours vraie.
Donc $\boxed{\mathcal{D}_g = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{4}{3}\right\}}$.

- $h = \dfrac{h_1 \circ h_2}{h_3}$ avec $h_1(x) = \sqrt{x}$, $h_2(x) = -2x + 7$ et $h_3(x) = x - 3$.
$\star$ $\mathcal{D}_{h_2} = \mathbb{R}$ et $h_2(x) \in \mathcal{D}_{h_1} \iff -2x + 7 \geqslant 0 \iff 7 \geqslant 2x \iff x \leqslant \frac{7}{2}$
donc $\mathcal{D}_{h_1 \circ h_2} =]-\infty, \frac{7}{2}]$.
$\star$ $D_{h_3} = \mathbb{R}$
$\star$ $h_3(x) \neq 0 \iff x \neq 3$
Donc $\boxed{\mathcal{D}_h =]-\infty, 3[\cup]3, \frac{7}{2}]}$.

Correction 3.

1. $\boxed{(2,0) \text{ est un élément de } A}$, et $\boxed{(0,1) \text{ est un élément de } B}$.

2. Soit $a \in A$, montrons que $a \in B$.
$a \in A$ donc il existe un nombre réel θ tel que $a = (2\cos(\theta), \sin(\theta))$.
Alors $(2\cos(\theta))^2 + 4(\sin(\theta))^2 = 4\cos^2(\theta) + 4\sin^2(\theta) = 4(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = 4 \times 1 = 4$.
Donc $a \in B$.
On a bien montré que $\boxed{A \subset B}$.

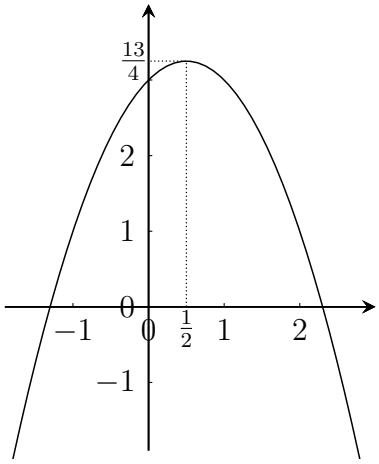
3. On a alors $A \subset B$ et $B \subset A$ donc $\boxed{A = B}$.

Correction 4.

1. **(a)**
$$\begin{aligned} h(t) &= -(t^2 - t) + 3 \\ &= -(t^2 - 2 \times \tfrac{1}{2} \times t + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2) + 3 \\ &= -(t - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} + 3 \\ &= \boxed{-(t - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{13}{4}} \end{aligned}$$

Pour tracer la courbe, on part de la courbe de la fonction carré, et on effectue les transformations suivantes dans cet ordre :
⋆ on la décale de $\frac{1}{2}$ vers la droite
⋆ on prend le symétrique par rapport à l'axe des abscisses
⋆ on la remonte de $\frac{13}{4}$

$\boxed{\text{La hauteur maximale atteinte est donc } \frac{13}{4}.}$



(b) t_0 vérifie $h(t_0) = 0$.
Et $h(t) = 0 \iff -t^2 + t + 3 = 0$
Pour ce polynôme, $\Delta = 1 + 12 = 13$.
Les deux racines sont $\frac{-1-\sqrt{13}}{-2}$ soit $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$
$\frac{-1+\sqrt{13}}{-2}$ soit $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$
Or $t_0 > 0$ et $\sqrt{13} > 1$ donc la seule solution pour t_0 est $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.
Donc $\boxed{\text{le projectile touche le sol au bout de } \frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ secondes}}$.

2.
$$\begin{aligned} h(t) &= -(t^2 - vt) + 3 \\ &= -\left(t - 2 \times \tfrac{v}{2}t + \left(\tfrac{v}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{v}{2}\right)^2\right) + 3 \\ &= -\left(t - \tfrac{v}{2}\right)^2 + \tfrac{v^2}{4} + 3 \end{aligned}$$

Le maximum a pour valeur $\frac{v^2}{4} + 3$. On cherche donc v tel que $\frac{v^2}{4} + 3 \geqslant 5$.
$\frac{v^2}{4} + 3 \geqslant 5 \iff \frac{v^2}{4} \geqslant 2 \iff v^2 \geqslant 8$.
Or $v > 0$ donc $v \geqslant \sqrt{8}$.

$\boxed{\text{Les valeurs de } v \text{ qui font que le projectile monte à au moins 5 mètres sont les valeurs plus grandes que } \sqrt{8} \text{ mètres par seconde.}}$

Correction 5.

Attention : *on demande de déterminer LA ou LES valeurs de x ... c'est-à-dire TOUTES les valeurs qui réalisent la condition.*
Il s'agit donc de raisonner par équivalence, avec des conditions nécessaires et suffisantes, autrement dit « il faut et il suffit ».

1. $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{w} = 0$.
Or $\vec{u}.\vec{w} = 2 + x^2 + 2x + 4x = x^2 + 6x + 2$.
$\Delta = 28 = 4 \times 7$ donc $r_1 = -3 + \sqrt{7}$ et $r_2 = -3 - \sqrt{7}$.
Donc $\boxed{\text{les valeurs de } x \text{ pour lesquelles } \vec{u} \text{ et } \vec{w} \text{ sont orthogonaux sont } -3+\sqrt{7} \text{ et } -3-\sqrt{7}}$.

2. $\vec{u}.\vec{v} = 2$ donc $\boxed{\text{aucune valeur de } x \text{ ne peut faire que } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ soient orthogonaux}}$.

3. $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{0}$.
$\vec{u} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 2x^2 - 2x - 4 \\ 4 - 2x \\ 2 - x \end{pmatrix}$ **Attention :** $\vec{u} \wedge \vec{w}$ *est un vecteur !*
$4 - 2x = 0 \iff x = 2$
et $2 - x = 0 \iff x = 2$
et 2 est aussi solution de $2x^2 - 2x + 4 = 0$.
Donc $\boxed{\text{la seule valeur de } x \text{ pour laquelle } \vec{u} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires est } 2}$.

4. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.
$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \ldots = -2x^3 + 2x^2 + 3x + 2$. (*avec la règle de Sarrus par exemple*)
On note P ce polynôme.
$P(2) = -2 \times 2^3 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2 + 2 = -16 + 8 + 6 + 2 = 0$, donc $(x - 2)$ divise P.
on pose la division euclidienne ou on procède par identification des coefficients
on trouve $P(x) = (x - 2)(-2x^2 - 2x - 1)$ or pour $-2x^2 - 2x - 1$, on trouve $\Delta < 0$ donc P n'a qu'une racine c'est 2.
Donc $\boxed{\vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires si et seulement si } x = 2}$.

Attention : *les coordonnées complexes n'ont pas de sens !!*

Correction 6.

1. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est au signe près, l'aire du parallélogramme formé sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Or le triangle ABC est la moitié de ce parallélogramme, donc l'aire de ABC est bien au signe près, la moitié du déterminant.
Donc $\mathcal{A}^2 = (\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))^2 = \frac{1}{4}\left(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right)^2$, et l'aire est positive, donc $\boxed{\mathcal{A} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right)^2}}$.

2. • D'une part, $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BC}^2 = BC^2 = a^2$.
• D'autre part, $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$
$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$
$= c^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + b^2$
Donc on a $a^2 = c^2 + b^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ soit $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 - a^2$, et donc $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$.

3. $\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \text{ si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non nuls, et } \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ sinon}}$.
$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \text{ si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non nuls, et } \vec{u}.\vec{v} = 0 \text{ sinon}}$.
Le triangle n'est pas aplati donc les trois sommets sont distincts donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas nuls.
Donc :

$$\begin{aligned}(\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}))^2+(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2 &= \left(\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right)^2+\left(\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right)^2\\ &= c^2b^2\sin^2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+c^2b^2\cos^2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\\ &= c^2b^2\left(\sin^2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+\cos^2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right)\\ &= \boxed{b^2c^2}\end{aligned}$$

4. On déduit que $$\begin{aligned}(\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}))^2 &= b^2c^2-(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2\\ &= b^2c^2-\left(\tfrac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)^2\\ &= \left(bc+\tfrac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)\left(bc-\tfrac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)\\ &= \left(\tfrac{1}{2}(2bc+b^2+c^2-a^2)\right)\left(\tfrac{1}{2}(2bc-b^2-c^2+a^2)\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(b^2+c^2+2bc-a^2\right)\left(a^2-(b^2+c^2-2bc)\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left((b+c+a)(b+c-a)\right)\left((a+(b-c))(a-(b-c))\right)\\ &= \tfrac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{4}(\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}))^2=\dfrac{a+b+c}{2}\times\dfrac{-a+b+c}{2}\times\dfrac{a-b+c}{2}\times\dfrac{a+b-c}{2}$

Or, $p-a=\dfrac{a+b+c}{2}-\dfrac{2a}{2}=\dfrac{a+b+c-2a}{2}=\dfrac{-a+b+c}{2}$

De même, $p-b=\dfrac{a-b+c}{2}$ et $p-c=\dfrac{a+b-c}{2}$.

On retrouve donc bien $\boxed{\mathcal{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

5. Avec ces valeurs, $p=\frac{1}{2}(5+7+8)=10$, donc :
$\mathcal{A}=\sqrt{10\times(10-5)\times(10-7)\times(10-8)}=\sqrt{10\times5\times3\times2}=10\sqrt{3}$.
$\boxed{\text{L'aire de ce triangle est } 10\sqrt{3}\text{cm}^2.}$

Correction 7.

1. $\{0\}$ $\{0\}$ $\{0\}$ $\emptyset$ $]-\infty,0[$ $\{0\}$ $\{0\}$

2. Faux

3. $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{1\}\}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))=\left\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{1\}\},\{\emptyset,\{1\}\}\right\}$

4. par exemple $(0,\frac{1}{3})$ et $(-1,1)$
par exemple 3 (avec $x=1$ et $y=\frac{1}{3}$) et $\frac{19}{2}$ (avec $x=4$ et $y=\frac{1}{2}$)

5. $\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$

6. $\sin(\frac{3\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. $\cos(\frac{5\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Correction 8.

1. $\boxed{\mathcal{D}_g = [-6, 6]}$.

x	-6		-1		0		1		6
$g(x)$	-8	↗	5	↘	3	↗	7	↘	1

2. $\boxed{\mathcal{D}_h = [-10, 2]}$

x	-10		-5		-4		-3		2
$h(x)$	-10	↗	3	↘	1	↗	5	↘	-1

h est la composée de $x \mapsto x+4$ par f, elle est donc définie lorsque $x + 4 \in \mathcal{D}_f$.
Autre vision : h est en avance sur f

3. $\boxed{\mathcal{D}_k = [-6, 6]}$.

x	-6		-1		0		1		6
$k(x)$	30	↘	-9	↗	-3	↘	-15	↗	3

4. $\boxed{\mathcal{D}_\ell = [-12; 12]}$.

x	-12		-2		0		2		12
$\ell(x)$	-10	↗	3	↘	1	↗	5	↘	-1

même remarque que pour h : ℓ est définie pour les x tels que $\frac{x}{2} \in \mathcal{D}_f$!