Énoncés

Chapitre 2.1 Statiques des fluides

Pour commencer

Entraînement 1.1 — Quelques conversions.

On rappelle que $1\,\text{atm} = 1\,013{,}25\,\text{hPa}$.

Un fluide exerce sur une paroi une pression de 750 kPa. Convertir cette pression en :

a) $\text{N} \cdot \text{cm}^{-2}$ ..... b) bar ..... c) atm .....

Entraînement 1.2 — Champagne !

Dans une bouteille de champagne, le gaz est maintenu sous une pression $p = 6{,}0\,\text{bar}$ grâce à un bouchon cylindrique de diamètre 20 mm.

a) Quelle est l'intensité de la force pressante qui pousse le bouchon vers le haut ? .....

b) Quelle est la pression intérieure si l'on incline la bouteille de 30° ? .....

Entraînement 1.3 — Est-ce au moins homogène ?

On considère un fluide dont la pression p dépend de l'altitude z (comprise entre 0 et z_{max}). Pour $z = 0$, la pression vaut p_0. Après analyse et résolution du problème, quatre étudiants obtiennent quatre résultats différents pour l'expression de $p(z)$.

Indiquer le ou les résultats qui ont le mérite d'être homogènes :

(a) $p(z) = p_0 + z$

(b) $p(z) = p_0\left(1 - \text{e}^{-\frac{z}{z_{\text{max}}}}\right) + z$

(c) $p(z) = \dfrac{z_{\text{max}}}{z_{\text{max}} + z}\, p_0$

(d) $p(z) = \dfrac{1 - z - z^2}{1 - z_{\text{max}} - {z_{\text{max}}}^2}\, p_0$

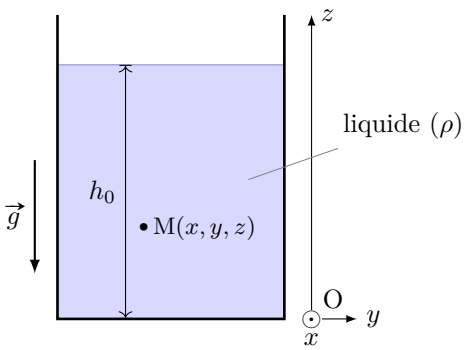
.....

Pression dans un liquide

Entraînement 1.4 — Quelle est la formule déjà ?

On considère un liquide incompressible de masse volumique ρ en équilibre dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme et soumis à une pression p_0 à sa surface.

Comment s'exprime la pression au point M dans le liquide ?



(a) $p(\mathrm{M}) = p_0(1 - \rho g z)$

(b) $p(\mathrm{M}) = (p_0 + \rho g z)\,\vec{u_z}$

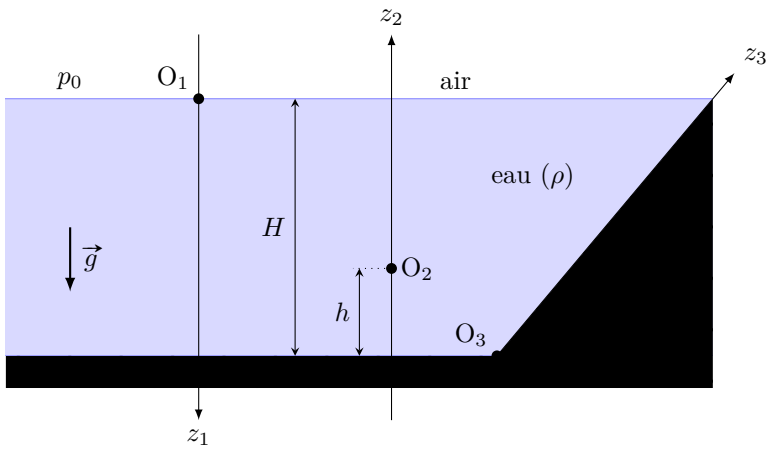
(c) $p(\mathrm{M}) = p_0 + \rho g h_0$

(d) $p(\mathrm{M}) = p_0 + \rho g(h_0 - z)$

.....

Entraînement 1.5 — La pression dans différents repères.

On note p la pression dans l'eau, supposée incompressible et de masse volumique ρ, et p_0 la pression de l'air à l'interface eau/air.



Exprimer p dans les différents systèmes de coordonnées :

a) $p(z_1)$, en fonction de p_0, de g et de z_1 .....

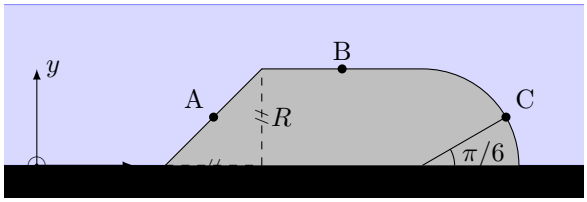
b) $p(z_2)$, en fonction de p_0, de g, de z_2 de H et de h .....

c) $p(z_3)$, en fonction de p_0, de g, de z_3 de H et de α .....

Entraînement 1.6 — Projection de vecteurs.

On considère un solide situé au fond de l'eau.

Exprimer, dans la base orthonormée $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, le vecteur unitaire normal à la surface de l'objet et orienté dans le sens de la force pressante de l'eau sur l'objet :



a) En A .....

c) En C .....

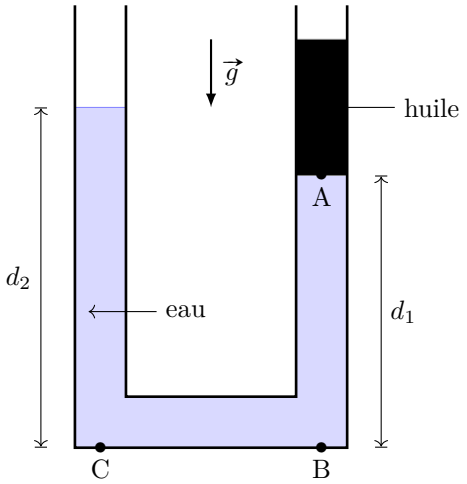
b) En B .....

Entraînement 1.7 — Dans un tube en U.

On verse dans un tube en U, dont la section a pour surface s, une certaine quantité d'eau puis un volume V_h d'huile. Les liquides se répartissent comme indiqué ci-contre.

On cherche à exprimer la différence de hauteur entre les deux niveaux d'eau de part et d'autre.

On note p_atm la pression atmosphérique, ρ_e la masse volumique de l'eau et ρ_h celle de l'huile.



a) Que peut-on dire de la pression en A ?

(a) $p_\text{A} = p_\text{atm} + \rho_\text{e} g \dfrac{V_\text{h}}{s}$ (b) $p_\text{A} = p_\text{atm} + \rho_\text{h} g \dfrac{V_\text{h}}{s}$ (c) $p_\text{A} = p_\text{atm} + \rho_\text{e} g d_1$

.....

b) Que peut-on dire de la pression en B ?

(a) $p_\text{B} = p_\text{atm} + \rho_\text{e} g d_1$ (b) $p_\text{B} = p_\text{atm} + \rho_\text{e} g \left(\dfrac{V_\text{h}}{s} + d_1 \right)$ (c) $p_\text{B} = p_\text{A} + \rho_\text{e} g d_1$

.....

c) Que peut-on dire de la pression en C ?

(a) $p_\text{C} = p_\text{B}$ (b) $p_\text{C} = p_\text{atm} + p_\text{A}$ (c) $p_\text{C} = p_\text{atm} + \rho_\text{e} g d_2$

.....

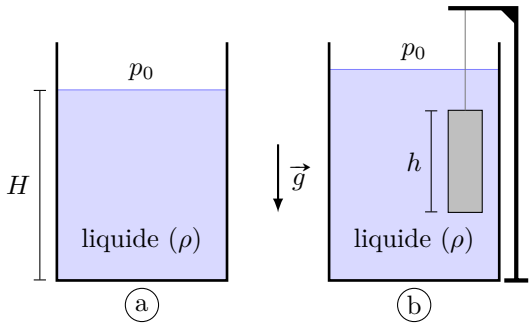
d) En déduire une expression de $d_2 - d_1$ .....

Entraînement 1.8 — Immersion et pression.

Un récipient cylindrique de section de surface S contient un liquide sur une hauteur H : c'est la situation (a).

On immerge complètement un cylindre solide de section de surface s et de hauteur h que l'on maintient grâce à une potence : c'est la situation (b).

On note ρ la masse volumique du liquide et g le champ de pesanteur.



Exprimer la pression au fond du récipient en fonction des données :

a) Situation (a) ...

b) Situation (b) ...

Poussée d'Archimède

Entraînement 1.9 — Immersion de volumes.

La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ subie par un corps submergé ou immergé dans un fluide est une force dont l'intensité correspond à celle du poids de fluide déplacé par ce corps : $\|\vec{\Pi}\| = m_{\text{fluide}} \times g$.

On connaît les masses volumiques suivantes, à 25 °C :

Matériau	aluminium	eau	fer	glycérine	plastique	savon liquide
Masse volumique (en $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	2,7	1,0	7,9	1,2	0,9	2,5

Calculer, à 25 °C, l'intensité de la poussée d'Archimède qui s'exerce sur :

a) un cube de fer de côté $a = 10\,\text{cm}$ totalement immergé dans de la glycérine.

b) une boule d'aluminium de rayon $a = 10\,\text{cm}$ à moitié immergée dans du savon liquide.

c) un cylindre de plastique de rayon $a = 10\,\text{cm}$ et de hauteur $4a$ immergé verticalement aux deux tiers dans de l'eau.

Entraînement 1.10 — Flottaison d'un glaçon.

Un glaçon de masse volumique ρ_S et de volume V_S, déposé dans un fluide de masse volumique ρ_L et de volume V_L, s'immerge d'un volume V_{imm}. Comment sont reliées ces grandeurs ?

(a) $\rho_L V_S = \rho_S V_{\text{imm}}$

(b) $\rho_L V_{\text{imm}} = \rho_S V_S$

(c) $\rho_S V_{\text{imm}} = \rho_S V_S$

(d) $\rho_S V_{\text{imm}} = \rho_L V_S$

(e) $\rho_L V_{\text{imm}} = \rho_L V_L$

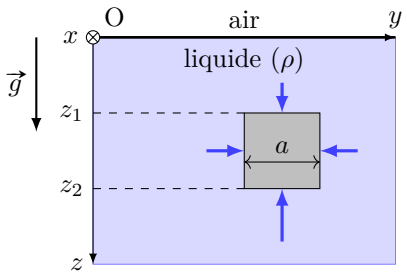
(f) $V_{\text{imm}} = V_S$

Entraînement 1.11 — Eurêka !

Un bloc solide qui a la forme d'un cube d'arête a est plongé dans un liquide de masse volumique ρ.

Il est soumis à des forces pressantes sur chacune des faces.

On note $\vec{R}$ la résultante de ces forces.



Exprimer les composantes de $\vec{R}$ dans le repère orthonormé (O, x, y, z) :

a) R_x .... b) R_y ..... c) R_z .....

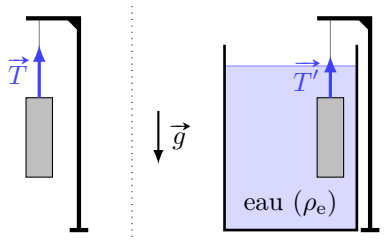
d) Retrouver $\vec{R}$ en fonction du poids $\vec{P_d}$ du liquide déplacé .....

Entraînement 1.12 — Mesure de densité.

Un morceau de métal de volume inconnu est suspendu à une corde.

Avant immersion, la tension dans la corde vaut 10 N.

Une fois le métal totalement immergé dans l'eau, on mesure une tension de 8 N.



a) Calculer l'intensité de la poussée d'Archimède .....

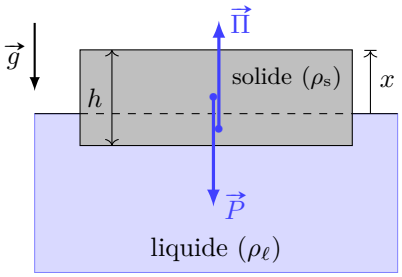
b) En déduire la densité du métal par rapport à l'eau .....

Entraînement 1.13 — Ligne de flottaison.

Un bloc en forme de parallélépipède, de masse volumique ρ_s, de base S et d'épaisseur h, flotte à la surface d'un liquide de masse volumique $\rho_\ell > \rho_s$.

On note $\vec{P}$ le poids du solide, $\vec{\Pi}$ la poussée d'Archimède, $\vec{g}$ le champ de pesanteur et x la hauteur de la partie émergée.

Enfin, on note $\vec{R} = \vec{P} + \vec{\Pi}$.



a) Exprimer $\vec{R}$ en fonction de x, h, S, ρ_s, ρ_ℓ et $\vec{g}$ .....

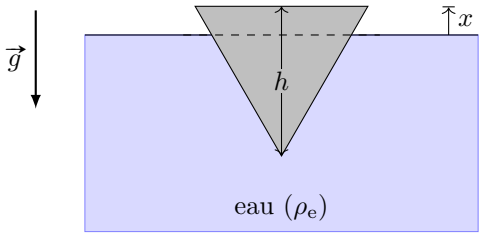
b) En déduire la valeur de x quand le bloc est à l'équilibre .....

c) On exerce une force verticale $\vec{F}$ supplémentaire sur le glaçon pour le maintenir totalement immergé.

Que vaut $\|\vec{F}\|$? .....

Entraînement 1.14 — Iceberg conique.

Un iceberg en forme de cône, de masse volumique ρ_s, de hauteur h, flotte à la surface de l'eau de masse volumique ρ_e. On note x la hauteur de la partie émergée.



On rappelle que le volume d'un cône de section de surface S et de hauteur h vaut $\frac{1}{3}Sh$.

a) Parmi les résultats faux suivants, indiquer ceux qui ont le mérite d'être homogènes :

(a) $x = h\left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_e}\right)$

(b) $x = \sqrt[3]{\frac{h\rho_s}{\rho_e}}$

(c) $x = \frac{1}{3}\frac{h - \rho_s}{\rho_e}$

(d) $x = h(\rho_s - \rho_e)$

.....

b) Exprimer le volume immergé en fonction de S, h et x .....

c) En déduire x en traduisant l'égalité entre la poussée d'Archimède et le poids de l'iceberg.

.....

Entraînement 1.15 — Quand Archimède fait mal à la tête.

Considérons deux verres identiques A et B. On remplit le verre A d'eau jusqu'à une certaine hauteur h.

a) Dans le verre B, on met quelques glaçons, et on complète avec de l'eau jusqu'à la même hauteur h.

Les masses m_A et m_B des deux verres vérifient :

(a) $m_A < m_B$ (b) $m_A = m_B$ (c) $m_A > m_B$

.....

b) Dans le verre B, on remplace maintenant les glaçons par des boules de polystyrène de même masse que les glaçons mais de densité inférieure.

Par à rapport à la hauteur initiale, le niveau dans ce verre :

(a) augmente (b) reste le même (c) diminue

.....

c) On remplace les glaçons par des boules en fer de masse identique aux glaçons dans le verre B.

Par à rapport à la hauteur initiale, le niveau dans ce verre :

(a) augmente (b) reste le même (c) diminue

.....

Équation de la statique des fluides

Entraînement 1.16 — Atmosphère de Mars.

L'atmosphère de Mars est composée de 96 % de dioxyde de carbone, 2 % d'argon, 2 % de diazote et contient des traces de dioxygène, d'eau et de méthane.

La pression et la température moyennes à la surface de Mars sont $p_0 = 6\,\text{mbar}$ et $T = -60\,°\text{C}$.

On donne les masses molaires des éléments suivants :

Élément	H	C	O	N	Ar
Masse molaire (en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$)	1	12	16	14	40

a) Quelle est la masse molaire M de l'atmosphère martienne ? .....

On considère l'atmosphère martienne comme un gaz parfait, et on note ρ sa masse volumique.

b) Estimer ρ à la surface .....

Dans le référentiel martien d'axe (Oz) vertical ascendant, la pression vérifie l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g.$$

La température est considérée uniforme dans toute l'atmosphère.

c) La pression $p(z)$ dans l'atmosphère de Mars, qui vérifie $p(0) = p_0$, s'écrit alors :

(a) $p(z) = p_0\left(1 - \dfrac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \dfrac{RT}{Mg}$

(b) $p(z) = p_0 \exp\left(-\dfrac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \dfrac{Mg}{RT}$

(c) $p(z) = p_0 \exp\left(-\dfrac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \dfrac{RT}{Mg}$

(d) $p(z) = p_0\left(1 - \dfrac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \dfrac{Mg}{RT}$

.....

Le champ de pesanteur sur Mars vaut $g = 3{,}72\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

d) Estimer l'épaisseur H de l'atmosphère, qu'on assimilera à $5z_0$ .....

Entraînement 1.17 — Une expression infinitésimale.

On considère un fluide dont la pression p dépend de l'altitude z (comprise entre 0 et $z_{\max}$).

On suppose que cette pression vérifie la relation suivante :

$$p(z + \mathrm{d}z) - p(z) = -\frac{2}{z_{\max}} p(z)\,\mathrm{d}z.$$

On souhaite trouver l'expression de $p(z)$ en fonction de z et de p_0 (qui est la pression en $z = 0$).

a) Donner l'équation différentielle vérifiée par p .....

b) Donner l'expression de $p(z)$ en fonction de p_0 .....

Entraînement 1.18 — Résoudre l'équation de la statique.

Un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{e_z}$ vérifie l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\vec{e}_z = \rho\,\vec{g},$$

où ρ est la masse volumique du fluide, qui dépend éventuellement de la pression.

Dans chacun des cas suivants, déterminer le champ de pression $p(x, y, z)$ sachant que $p(x, y, 0) = p_0$ et que les paramètres a, b, c et g sont des constantes :

a) $\rho = a\dfrac{p}{p_0}$ .....

b) $\rho = a + b(p - p_0)$ .....

c) $\rho = a - b\,\mathrm{e}^{-z/c}$ .....

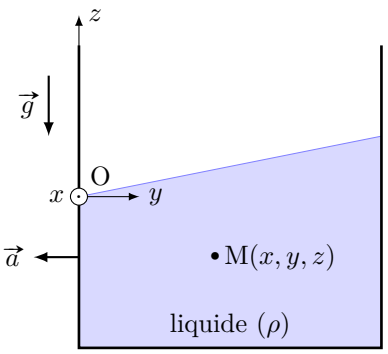
Entraînement 1.19 — Attention ça déborde !

Un récipient cubique contenant un liquide incompressible de masse volumique ρ est soumis à une accélération uniforme $\vec{a} = -a\,\vec{e_y}$.

Dans le référentiel lié au récipient, la pression vérifie l'équation :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) = \rho(\vec{g} - \vec{a}),$$

avec $p(0, 0, 0) = p_0$.



a) Déterminer $p(x, y, z)$ dans le liquide .....

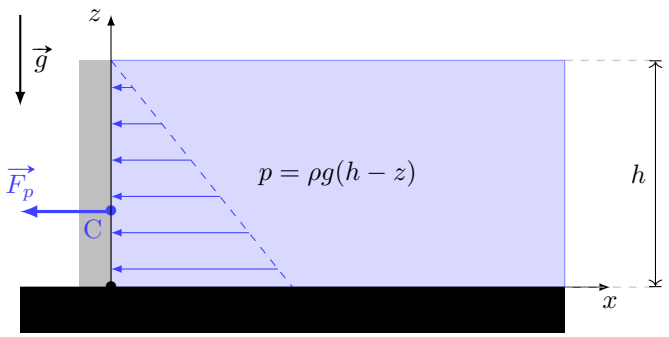
b) En déduire l'équation de la surface libre .....

Forces pressantes

Entraînement 1.20 — Pression sur un barrage.

Un barrage rectangulaire de hauteur h et de largeur L baigne d'un côté dans l'air et de l'autre dans de l'eau.

On modélise la situation à l'aide du schéma suivant :



La fonction $p = \rho g(h - z)$ correspond à la surpression exercée par l'eau à l'altitude z, étant donné la masse volumique de l'eau ρ et l'intensité du champ de pesanteur g.

Calculer :

a) la résultante des forces pressantes $F_p = \iint_{\text{barrage}} p(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ .....

b) le moment en O des forces pressantes $\mathcal{M}_p = \iint_{\text{barrage}} z\,p(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ .....

c) la position du centre de poussée z_C tel que $\mathcal{M}_p = z_C \times F_P$ .....

Généralités

Entraînement 1.21 — Forces pressantes de l'atmosphère.

a) Donner l'ordre de grandeur de la pression atmosphérique en Pa.

.....

b) L'exprimer en $\mathrm{N} \cdot \mathrm{cm}^{-2}$.

.....

c) Quelle est l'intensité de la force à appliquer sur une surface de $10\,\mathrm{cm}^2$ pour exercer la pression de 1 bar ?

.....

Fluide et forces de pression

Entraînement 1.22 — Forces de pression sur un barrage vertical.

On considère un barrage assimilé à un mur vertical de hauteur h et de largeur L muni d'un repère orthonormé direct.

Il est en contact à gauche avec de l'air à la pression uniforme $p_0 = 1\,\mathrm{bar}$, à droite avec de l'eau au repos de masse volumique μ.

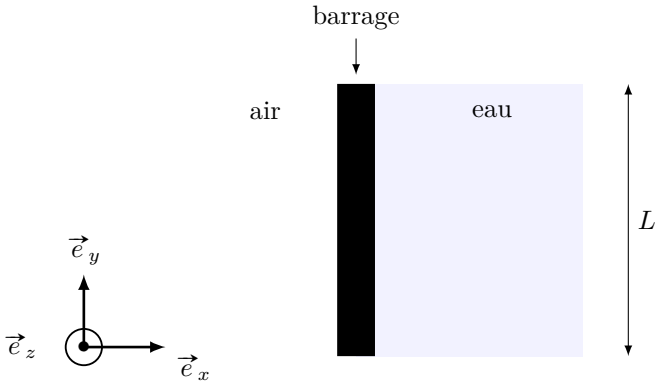
La pression dans l'eau est donnée en fonction de l'altitude z par la relation $p(z) = p_0 - \mu g z$. Dans ce cas, l'origine de l'axe ascendant $(\mathrm{O}z)$ est prise à l'interface eau/air.

Le barrage est défini sur l'intervalle $z \in [-h, 0]$.

La force de pression qu'un fluide exerce sur la surface S du barrage s'écrit :

$$\overrightarrow{F_\text{p}} = F_\text{p}\,\vec{u} = \left(\iint_S p(M)\,\mathrm{d}S\right)\vec{u} = \left(\iint_S p(y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)\vec{u},$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire, perpendiculaire à la surface du barrage, orienté du fluide vers le barrage.



Vue de dessus

a) Exprimer la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F_1}$ de l'air sur le barrage.

.....

b) Exprimer la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F_2}$ de l'eau sur le barrage.

.....

c) En déduire la résultante de force de pression $\vec{F}$ agissant sur le barrage.

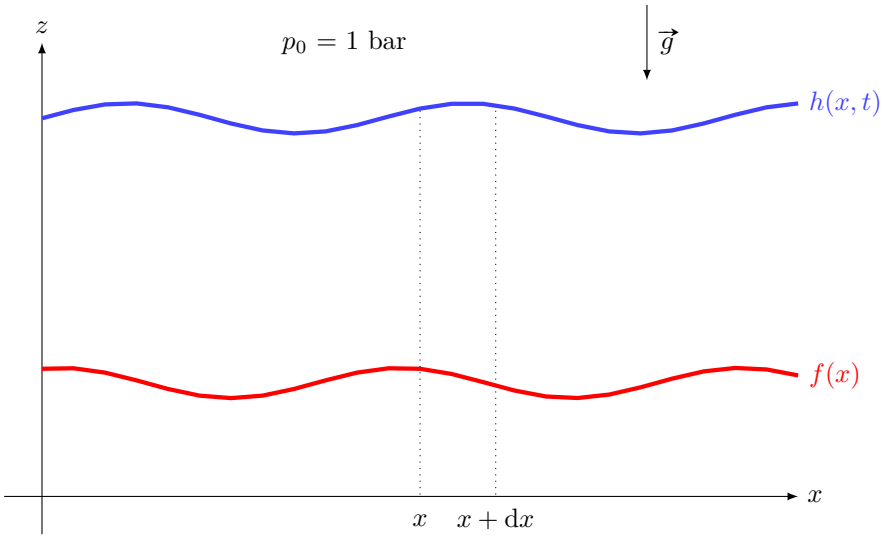
.....

Entraînement 1.23 — Force de pression dans une vague.

On souhaite exprimer la résultante des forces de pression dans une vague.

On considère une vague modélisée par un écoulement unidimensionnel, le long de l'axe $(\mathrm{O}x)$. La vitesse de l'eau, de masse volumique μ, est supposée de la forme $\vec{v} = v(x,t)\vec{e_x}$.

La largeur de l'écoulement est supposée constante et égale à L. Le fond marin est situé à la cote $z_\text{fond} = f(x)$ et la surface libre de l'eau est située à la cote $z_{S_\text{libre}} = h(x,t)$. L'air ambiant est à la pression standard p_0 et le champ de pesanteur est uniforme, de norme g.



a) On suppose que la pression dans le fluide est de type hydrostatique, c'est-à-dire que la pression $p(M)$ en un point M vaut $p_0 + \mu g \times \Delta H$, où ΔH est la hauteur de la colonne de fluide au-dessus du point M.

Donner l'expression de la pression $p(x, z, t)$ en un point de l'eau, en fonction de μ, g, $h(x,t)$ et z.

.....

b) On considère désormais une tranche de fluide située entre x et $x + \mathrm{d}x$.

Donner l'expression du volume élémentaire $\mathrm{d}V$ de ce système, en fonction de L, $\mathrm{d}x$, $h(x,t)$ et $f(x)$.

.....

c) On rappelle que l'expression de la résultante des forces de pression $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ agissant sur un volume élémentaire est $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = -\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x + \dfrac{\partial p}{\partial y}\vec{e}_y + \dfrac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z\right) \times \mathrm{d}V$.

En déduire l'expression de la résultante des forces de pression $\mathrm{d}F_x$ selon $(\mathrm{O}x)$, qui s'exerce sur une tranche d'épaisseur $\mathrm{d}x$.

.....

Pression dans l'atmosphère isotherme

Entraînement 1.24 — Masse volumique d'un gaz parfait.

Considérons n moles d'air assimilé à un gaz parfait, à la pression p et à la température T_0.

On donne la masse molaire de l'air : $M_{\text{air}} = 29\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

a) On considère un système élémentaire composé de δn moles d'air. Exprimer sa masse volumique ρ en fonction de δn, M_{air} et de son volume $\mathrm{d}V$.

.....

b) En utilisant la loi des gaz parfaits, exprimer ρ la masse volumique du gaz en fonction des grandeurs M_{air}, p, R et T_0.

.....

c) Évaluer la masse volumique ρ de l'air, au niveau de l'océan à $T_0 = 15\,°\text{C}$.

Le résultat sera exprimé en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

.....

Entraînement 1.25 — Calcul de pression.

Un fluide de masse volumique ρ possède une pression dépendant de l'altitude z. L'axe (Oz) est un axe ascendant et $p(z = 0) = p_0$.

L'équation vérifiée par $p(z)$ est $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho g = 0$, avec $g = 10\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

• Le fluide est de l'eau, situé dans la région $z < 0$.

a) Quelle est la masse volumique ρ_0 de l'eau en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$? .....

b) Déterminer l'expression de la pression $p(z)$ dans l'eau pour $z \in [-H, 0]$.

.....

• Le fluide est un gaz parfait de masse molaire M occupant tout l'espace. La température est uniforme et sera notée T_0.

c) À l'aide de la loi des gaz parfaits, écrire $\rho(z)$ en fonction de T_0, $p(z)$, R et M.

.....

d) Déterminer $p(z)$ en tout point de l'espace .....

• Le fluide est un gaz parfait de masse molaire M occupant tout l'espace. La température est non uniforme et dépend de z : $T(z) = T_0 - \alpha z$.

e) Déterminer $p(z)$ en tout point de l'espace .....

Entraînement 1.26 — Analyse du résultat.

Dans le modèle de l'atmosphère isotherme, la pression varie avec l'altitude z selon la loi :

$$p(z) = p_0 \mathrm{e}^{-z/H},$$

où $H = \dfrac{RT_0}{Mg} \approx 8{,}4\,\text{km}$ et $p_0 = 10^5\,\text{Pa}$.

a) À quelle altitude z_0 exprimée en km la pression est-elle diminuée de moitié par rapport à celle au niveau de la mer ? .....

b) Établir une expression approchée de $p(z)$ valable pour des altitudes vérifiant $z \ll H$.

.....

c) Vous êtes sur la plage, les pieds dans l'eau. Vos pieds sont à la pression p_0.

Estimer $\dfrac{\Delta p}{p_0}$ entre vos pieds et votre tête, en pourcentage .....

Forces dans les fluides

Entraînement 1.27 — Statique des fluides.

La pression $P(z)$ pour un fluide homogène de masse volumique μ au repos dépend de l'altitude : on a

$$P(z) = P_0 - \mu g z.$$

a) Exprimer l'équivalent volumique $-\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x + \dfrac{\partial p}{\partial y}\vec{e}_y + \dfrac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z\right)$ des forces de pression.

.....

b) Exprimer la résultante des forces de pression exercées sur une surface S de largeur L selon $(\mathrm{O}y)$ et de hauteur h comprise entre $z = 0$ et $z = h$.

On rappelle que cette résultante est définie par $\overrightarrow{F_P} = -\iint_\Sigma P(\mathrm{M})\,\overrightarrow{n_{\text{ext}}}\,\mathrm{d}S$.

.....

Entraînement 1.28 — Gradient de pression.

L'écoulement d'un fluide homogène de masse volumique μ se fait dans une conduite grâce à un gradient constant de pression dans la direction $(\mathrm{O}x)$ tel que $P(x_1) = P_1$ et $P(x_2 = x_1 + L) = P_2$.

a) Exprimer le gradient de pression $\dfrac{\partial P(x)}{\partial x}\vec{e}_x$ du fluide .....

b) Exprimer la pression $P(x)$ du fluide selon l'abscisse x .....

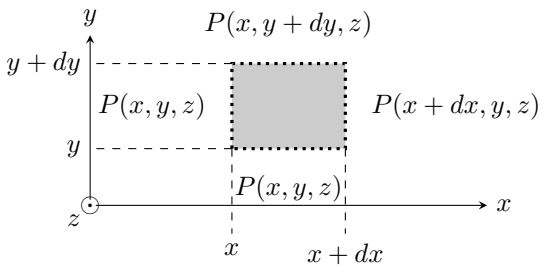
c) Calculer la force de pression exercée sur une section S de la conduite située en $x = L$.

.....

Entraînement 1.29 — Équivalent volumique des forces de pression.

On cherche la résultante des forces de pression $\mathrm{d}\overrightarrow{F_P}$ que le fluide environnant exerce sur une particule fluide de volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, située entre x et $x + \mathrm{d}x$, y et $y + \mathrm{d}y$, z et $z + \mathrm{d}z$.

La force de pression $\mathrm{d}\vec{F}$ s'exerçant sur un côté de surface $\mathrm{d}S$ de cette particule s'exprime $\mathrm{d}\vec{F} = -P\,\mathrm{d}S\,\vec{n}$, où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface et dirigé de l'intérieur du volume vers l'extérieur.



a) Exprimer la force de pression $\mathrm{d}\overrightarrow{F_g}$ s'exerçant sur la paroi latérale gauche de la particule en fonction de $P(x, y, z)$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$.

.....

b) Exprimer la force de pression $\mathrm{d}\overrightarrow{F_d}$ s'exerçant sur la paroi latérale droite de la particule en fonction de $P(x + \mathrm{d}x, y, z)$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$.

.....

c) En déduire une expression de la résultante $\mathrm{d}F_{Px}$ des forces de pression suivant $(\mathrm{O}x)$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$ et d'une dérivée partielle de P du premier ordre.

.....

d) Reproduire le raisonnement pour exprimer la résultante $\mathrm{d}F_{Py}$ des forces de pression suivant $(\mathrm{O}y)$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$ et d'une dérivée partielle de P du premier ordre.

.....

e) Reproduire le raisonnement pour exprimer la résultante $\mathrm{d}F_{Pz}$ des forces de pression suivant $(\mathrm{O}z)$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$ et d'une dérivée partielle de P du premier ordre.

.....

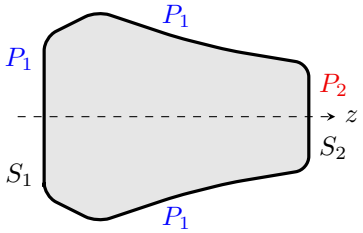
f) En déduire l'expression vectorielle de la force volumique de pression $\overrightarrow{f_P}$ en fonction de P au sein du fluide.

.....

Entraînement 1.30 — Surface fermée soumise à une pression non uniforme.

On cherche la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F_P}$ qui s'exerce sur un solide de révolution d'axe $(\mathrm{O}z)$, de surface fermée Σ, constituée de deux sections planes S_1 et S_2 perpendiculaires à $(\mathrm{O}z)$, reliées par une surface latérale S_{lat} de forme quelconque.

La surface latérale S_{lat} comme la section S_1 sont soumises à une pression P_1 tandis que la section S_2 est soumise à la pression P_2.



a) Que vaudrait la résultante des forces de pression s'exerçant sur Σ si on avait $P_1 = P_2$?

.....

b) La distribution des pressions qui s'exercent sur Σ est équivalente à la superposition d'une distribution uniforme P_1 sur l'ensemble de Σ et d'une pression extérieure P' appliquée sur la partie droite de la seule section S_2, avec :

(a) $P' = P_2$ (b) $P' = P_2 - P_1$ (c) $P' = P_1 + P_2$

.....

c) La résultante des forces de pression qui s'exerce sur le solide de surface fermée Σ vaut :

(a) $\overrightarrow{F_P} = (P_2 - P_1)S_1\vec{e_z}$ (c) $\overrightarrow{F_P} = (P_2 - P_1)S_2\vec{e_z}$

(b) $\overrightarrow{F_P} = (P_1 - P_2)S_1\vec{e_z}$ (d) $\overrightarrow{F_P} = (P_1 - P_2)S_2\vec{e_z}$

.....

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Chapitre 2.1 Statiques des fluides

Réponses

1.1 a) $\boxed{75\,\mathrm{N\cdot cm^{-2}}}$

1.1 b) $\boxed{7{,}5\,\mathrm{bar}}$

1.1 c) $\boxed{7{,}4\,\mathrm{atm}}$

1.2 a) $\boxed{1{,}9\times10^{2}\,\mathrm{N}}$

1.2 b) $\boxed{6\,\mathrm{bar}}$

1.3 $\boxed{\text{c}}$

1.4 $\boxed{\text{d}}$

1.5 a) $\boxed{p_0+\rho g z_1}$

1.5 b) $\boxed{p_0+\rho g(H-h-z_2)}$

1.5 c) $\boxed{\rho g(H-z_3\sin(\alpha))+p_0}$

1.6 a) $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e_x}-\vec{e_y})}$

1.6 b) $\boxed{-\vec{e_y}}$

1.6 c) $\boxed{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\vec{e_x}+\vec{e_y}\right)}$

1.7 a) $\boxed{\text{b}}$

1.7 b) $\boxed{\text{c}}$

1.7 c) $\boxed{\text{a}\ \text{c}}$

1.7 d) $\boxed{\frac{\rho_\mathrm{h}V_\mathrm{h}}{\rho_\mathrm{e}s}}$

1.8 a) $\boxed{p_0+\rho gH}$

1.8 b) $\boxed{p_0+\rho g\left(H+\frac{s}{S}h\right)}$

1.9 a) $\boxed{12\ \mathrm{N}}$

1.9 b) $\boxed{51\ \mathrm{N}}$

1.9 c) $\boxed{82\ \mathrm{N}}$

1.10 $\boxed{\text{b}}$

1.11 a) $\boxed{0}$

1.11 b) $\boxed{0}$

1.11 c) $\boxed{-\rho g a^3}$

1.11 d) $\boxed{-\vec{P_\mathrm{d}}}$

1.12 a) $\boxed{2\,\mathrm{N}}$

1.12 b) $\boxed{5}$

1.13 a) $\boxed{[\rho_\mathrm{s}h-\rho_\ell(h-x)]S\,\vec{g}}$

1.13 b) $\boxed{h\left(\frac{\rho_\ell-\rho_\mathrm{s}}{\rho_\ell}\right)}$

1.13 c) $\boxed{(\rho_\ell-\rho_\mathrm{s})Shg}$

1.14 a) $\boxed{\text{a}}$

1.14 b) $\boxed{\frac{1}{3}\frac{S(h-x)^3}{h^2}}$

1.14 c) $\boxed{h\left(1-\sqrt[3]{\frac{\rho_\mathrm{s}}{\rho_\mathrm{e}}}\right)}$

1.15 a) $\boxed{\text{b}}$

1.15 b) $\boxed{\text{b}}$

1.15 c) $\boxed{\text{c}}$

1.16 a) $\boxed{43{,}6\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}}$

1.16 b) $\boxed{14{,}8\,\mathrm{g\cdot m^{-3}}}$

1.16 c) $\boxed{\text{c}}$

1.16 d) $\boxed{55\,\mathrm{km}}$

1.17 a) $\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\frac{2p}{z_\mathrm{max}}}$

1.17 b) $\boxed{p_0\,\mathrm{e}^{-2z/z_\mathrm{max}}}$

1.18 a) $\boxed{p_0\mathrm{e}^{-agz/p_0}}$

1.18 b) $\boxed{p_0+\frac{a}{b}(\mathrm{e}^{-bgz}-1)}$

1.18 c) $\boxed{p_0 - agz + bcg\left(1 - \mathrm{e}^{-z/c}\right)}$

1.19 a) $\boxed{\rho(ay - gz) + p_0}$

1.19 b) $\boxed{z = \frac{a}{g}y}$

1.20 a) $\boxed{\frac{1}{2}\rho g L h^2}$

1.20 b) $\boxed{\frac{1}{6}\rho g L h^3}$

1.20 c) $\boxed{\frac{1}{3}h}$

1.21 a) $\boxed{10^5\,\mathrm{Pa}}$

1.21 b) $\boxed{10\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{cm}^{-2}}$

1.21 c) $\boxed{100\,\mathrm{N}}$

1.22 a) $\boxed{p_0 h L \overrightarrow{e_x}}$

1.22 b) $\boxed{-\left(p_0 + \frac{\mu g h}{2}\right) h L \overrightarrow{e_x}}$

1.22 c) $\boxed{-\frac{\mu g h^2}{2} L \overrightarrow{e_x}}$

1.23 a) $\boxed{p_0 + \mu g(h(x,t) - z)}$

1.23 b) $\boxed{(h(x,t) - f(x))L\,\mathrm{d}x}$

1.23 c) $\boxed{-\mu g \frac{\partial h}{\partial x} \times (h(x,t) - f(x)) \times L\,\mathrm{d}x}$

1.24 a) $\boxed{\frac{M_{\mathrm{air}}\delta n}{\mathrm{d}V}}$

1.24 b) $\boxed{\frac{M_{\mathrm{air}} p}{RT_0}}$

1.24 c) $\boxed{1{,}2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}}$

1.25 a) $\boxed{1 \times 10^3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}}$

1.25 b) $\boxed{p_0 - \rho g z}$

1.25 c) $\boxed{\frac{p(z)M}{RT_0}}$

1.25 d) $\boxed{p_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)}$

1.25 e) $\boxed{p_0\left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\alpha R}}}$

1.26 a) $\boxed{5{,}8\,\mathrm{km}}$

1.26 b) $\boxed{p_0(1 - \frac{z}{H})}$

1.26 c) $\boxed{2 \times 10^{-2}\%}$

1.27 a) $\boxed{\mu g \overrightarrow{e_z}}$

1.27 b) $\boxed{L\left(P_0 h - \mu g \frac{h^2}{2}\right)\overrightarrow{e_z}}$

1.28 a) $\boxed{\frac{P_2 - P_1}{L}\overrightarrow{e_x}}$

1.28 b) $\boxed{\frac{P_2 - P_1}{L}(x - x_1) + P_1}$

1.28 c) $\boxed{\left[\frac{P_1 - P_2}{L}(L - x_1) + P_1\right] S \overrightarrow{e_x}}$

1.29 a) $\boxed{P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}}$

1.29 b) $\boxed{-P(x + \mathrm{d}x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}}$

1.29 c) $\boxed{-\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau}$

1.29 d) $\boxed{-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}\tau}$

1.29 e) $\boxed{-\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau}$

1.29 f) $\boxed{-\left[\frac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial P}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e_z}\right]}$

1.30 a) $\boxed{\overrightarrow{0}}$

1.30 b) $\boxed{\text{(b)}}$

1.30 c) $\boxed{\text{(d)}}$

Corrigés

1.1 a) Par définition, on a $1\,\text{Pa} = 1\,\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$. Ainsi, on a :

$$750\,\text{kPa} = 750\times10^3\,\text{Pa} = 750\times10^3\,\text{N}\cdot\text{m}^{-2} = 750\times10^3\times\text{N}\times(100\,\text{cm})^{-2} = 75\,\text{N}\cdot\text{cm}^{-2}.$$

.....

1.1 b) En effet, par définition, on a $1\,\text{bar} = 1\times10^5\,\text{Pa}$.

.....

1.1 c) Par définition, on a $1\,\text{atm} = 1\,013{,}25\,\text{hPa}$. C'est pourquoi $750\,\text{kPa} = 7\,500\,\text{hPa} = \dfrac{7\,500}{1\,013{,}25} = 7{,}4\,\text{atm}$.

.....

1.2 a) La force de pression s'écrit $\vec{F} = \iint p\,\vec{n}\,\mathrm{d}S$, où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à l'élément de surface et dirigé vers l'intérieur du solide. Ici $\vec{n}$ est vertical car la surface est un disque horizontal. Enfin, la pression étant uniforme sur la base du cylindre, on a :

$$\vec{F} = pS\,\vec{n}, \quad \text{soit} \quad F = p\pi(d/2)^2 = 6\times10^5\times\pi\times(0{,}01)^2 = 1{,}9\times10^2\,\text{N}.$$

.....

1.2 b) Le volume de gaz ne variant pas, la pression reste la même.

.....

1.3 La formule (a) n'est pas homogène car p_0 est une pression et z une longueur. La formule (b) n'est pas homogène car $p_0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{z}{z_{\max}}}\right)$ est une pression et z une longueur. La formule (d) n'est pas homogène car (entre autres) l'expression $1-z-z^2$ n'est pas homogène, puisque z est une longueur et z^2 une aire.

.....

1.4 Dans un liquide incompressible en équilibre dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$, la pression suit la loi $p(\text{M}) = p_0 + \rho g \times h_\text{M}$, où h_M est la profondeur du point M depuis la surface libre soumise à une pression p_0. Ici, le point M se situe à une profondeur $h_\text{M} = h_0 - z$. Donc, on a $p(\text{M}) = p_0 + \rho g(h_0 - z)$.

.....

1.5 a) L'équation fondamentale de la statique des fluides est $\overrightarrow{\text{grad}}\,p = \rho\vec{g}$. On projette cette égalité suivant l'axe $(\text{O}_1 z_1)$:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z_1} = \rho g \quad \text{d'où après intégration} \quad p(z_1) = \rho g z_1 + C_1.$$

À l'interface air/eau, on a $p(z_1 = 0) = p_0 = C_1$. Ainsi, on a $p(z_1) = p_0 + \rho g z_1$.

.....

1.5 b) Suivant l'axe $(\text{O}_2 z_2)$, on a $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z_2} = -\rho g$. D'où, $p(z_2) = -\rho g z_2 + C_2$. À l'interface air/eau, on a :

$$p(z_2 = H - h) = p_0 = -\rho g(H-h) + C_2.$$

Donc, on a $C_2 = p_0 + \rho g(H-h)$. Finalement, on trouve $p(z_2) = p_0 + \rho g(H - h - z_2)$.

.....

1.5 c) Suivant l'axe $(\text{O}_3 z_3)$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z_3} = -\rho g\sin\alpha \quad \text{ce qui donne} \quad p(z_3) = -\rho g\sin\alpha z_3 + C_3.$$

Au fond de l'eau, on a $p(z_3 = 0) = p_0 + \rho g H = C_3$. Par conséquent, on a $p(z_3) = \rho g(H - z_3\sin\alpha) + p_0$.

On pouvait aussi plus simplement reprendre la formule de la question b) et noter que $z_3 = (z_2 + h)/\sin(\alpha)$, ce qui donne le même résultat.

1.6 a) La force pressante est toujours normale à la surface de l'objet et orientée vers celui-ci.

On trouve ainsi : $\overrightarrow{u_{\mathrm{A}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e_x} - \vec{e_y})$.

1.6 b) La force pressante est toujours normale à la surface de l'objet et orientée vers celui-ci.

On trouve ainsi : $\overrightarrow{u_{\mathrm{B}}} = -\vec{e_y}$.

1.6 c) La force pressante est toujours normale à la surface de l'objet et orientée vers celui-ci.

On trouve ainsi : $\overrightarrow{u_{\mathrm{C}}} = -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\vec{e_x} - \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\vec{e_y} = -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\vec{e_x} + \vec{e_y}\right)$.

1.7 a) Le point A est sous une hauteur h d'huile de masse volumique ρ_{h} par rapport à la surface. La pression en A vaut donc : $p_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{atm}} + \rho_{\mathrm{h}} g h$. Le volume V_{h} d'huile occupe la hauteur h dans le tube de section s telle que : $V_{\mathrm{h}} = sh$. On obtient ainsi $p_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{atm}} + \rho_{\mathrm{h}} g \dfrac{V_{\mathrm{h}}}{s}$.

1.7 b) Le point B est sous une hauteur d_1 d'eau de masse volumique ρ_{e} par rapport à A, la pression en B vaut donc : $p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{A}} + \rho_{\mathrm{e}} g d_1$.

1.7 c) Le point C est sous une hauteur d_2 d'eau par rapport à la surface. La pression en C vaut donc :

$$p_{\mathrm{C}} = p_{\mathrm{atm}} + \rho_{\mathrm{e}} g d_2.$$

De plus, les points B et C sont à la même altitude dans le même fluide donc $p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{C}}$.

1.7 d) À partir des expressions de p_{A}, p_{B} et p_{C} obtenues précédemment, la relation $p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{C}}$ donne :

$$p_{\mathrm{atm}} + \rho_{\mathrm{h}} g \frac{V_{\mathrm{h}}}{s} + \rho_{\mathrm{e}} g d_1 = p_{\mathrm{atm}} + \rho_{\mathrm{e}} g d_2.$$

Il en découle : $d_2 - d_1 = \dfrac{\rho_{\mathrm{h}} V_{\mathrm{h}}}{\rho_{\mathrm{e}} s}$.

1.8 a) La pression qui règne dans un liquide incompressible s'écrit $p(\mathrm{M}) = p_0 + \rho g h_{\mathrm{M}}$, où h_{M} est la profondeur du point M depuis la surface libre soumise à une pression p_0. Ainsi, au fond du récipient, on a $p = p_0 + \rho g H$.

1.8 b) En plongeant le solide dans le liquide, on modifie la hauteur de liquide. Notons H' cette nouvelle hauteur. On obtient H' en traduisant l'additivité des volumes :

$$SH + sh = SH' \quad \text{soit} \quad H' = H + \frac{s}{S}h.$$

Finalement, la pression au fond du récipient vaut :

$$p = p_0 + \rho g H' = p_0 + \rho g\left(H + \frac{s}{S}h\right).$$

1.9 a) On a $\left\|\vec{\Pi}\right\| = m_{\mathrm{gly}} \times g = \rho_{\mathrm{gly}} \times V_{\text{immergé}} \times g$, avec $V_{\text{immergé}} = a^3$. Finalement, on trouve :

$$\left\|\vec{\Pi}\right\| = \rho_{\mathrm{gly}} \times a^3 \times g = 1{,}2 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot cm^{-3}} \times (10\,\mathrm{cm})^3 \times 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} = 12\,\mathrm{N}.$$

1.9 b) On a $\left\|\vec{\Pi}\right\| = m_{\text{savon}} \times g = \rho_{\text{savon}} \times V_{\text{immergé}} \times g$, avec $V_{\text{immergé}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3}\pi a^3$. Finalement, on trouve :

$$\left\|\vec{\Pi}\right\| = \frac{2}{3}\rho_{\text{savon}} \times \pi a^3 g = \frac{2}{3} \times 2{,}5 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{cm}^{-3} \times \pi \times (10\,\text{cm})^3 \times 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 51\,\text{N}.$$

.....

1.9 c) On a $\left\|\vec{\Pi}\right\| = m_{\text{eau}} \times g = \rho_{\text{eau}} \times V_{\text{immergé}} \times g$ avec $V_{\text{immergé}} = \dfrac{2}{3}\pi a^2 h$ avec $h = 4a$. Finalement, on trouve :

$$\left\|\vec{\Pi}\right\| = \frac{8}{3}\rho_{\text{eau}} \times \pi a^3 g = \frac{8}{3} \times 1{,}0 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{cm}^{-3} \times \pi \times (10\,\text{cm})^3 \times 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 82\,\text{N}.$$

.....

1.10 En notant $\vec{P}$ le poids du solide et $\vec{\Pi}$ la poussée d'Archimède qui s'exerce sur lui, la condition d'équilibre assure $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$. Par projection sur l'axe vertical, on obtient $m_S g - m_L g = 0$, avec m_L la masse de fluide déplacé par le glaçon. En faisant apparaître les masses volumiques, l'équation $m_S = m_L$ devient $\rho_S V_S = \rho_L V_{\text{imm}}$: (b).

.....

1.11 a) La pression ne dépend que de z, par conséquent les forces de pression qui s'exercent sur les faces latérales verticales se compensent. Aussi a-t-on $R_x = 0$.

.....

1.11 b) Pour les mêmes raisons que précédemment, $R_y = 0$.

.....

1.11 c) Rappelons que la pression vérifie la loi $p(z) = p_0 + \rho g z$ avec p_0 la pression qui règne à la surface libre. Faisons un bilan des forces qui agissent sur les faces horizontales du cube. La face du dessus ressent la force $\vec{F_1} = (p_0 + \rho g z_1) a^2\,\vec{e_z}$ alors que la face du dessous subit une force pressante $\vec{F_2} = -(p_0 + \rho g z_2) a^2\,\vec{e_z}$. Ainsi, la résultante verticale des forces pressantes vaut :

$$R_z = (\vec{F_1} + \vec{F_2}) \cdot \vec{e_z} = -\rho g a^2 (z_2 - z_1) = -\rho g a^3.$$

.....

1.11 d) On trouve donc $\vec{R} = -\rho g a^3\,\vec{e_z}$. L'immersion du solide déplace un volume a^3 de liquide, qui a pour masse $m = \rho\, a^3$ et poids $\vec{P_{\text{d}}} = \rho a^3\,\vec{g} = \rho a^3 g\,\vec{e_z}$. Ainsi on trouve $\vec{R} = -\vec{P_{\text{d}}}$ conformément au principe d'Archimède.

.....

1.12 a) Avant immersion, on a $\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$, où $\vec{P}$ est le poids du solide. Après, on a $\vec{T'} + \vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$, où $\vec{\Pi}$ est la poussée d'Archimède. On en déduit :

$$\vec{\Pi} = \vec{T} - \vec{T'} \quad \text{soit} \quad \|\vec{\Pi}\| = \|\vec{T} - \vec{T'}\| = 10\,\text{N} - 8\,\text{N} = 2\,\text{N}.$$

.....

1.12 b) On a vu que le poids vaut $P = 10\,\text{N}$ et la poussée d'Archimède $\Pi = 2\,\text{N}$. Or, on a :

$$P = \rho_{\text{s}} V g \quad \text{et} \quad \Pi = \rho_{\text{e}} V g \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_{\text{s}} & \text{masse volumique du solide} \\ \rho_{\text{e}} & \text{masse volumique de l'eau.} \end{cases}$$

Le rapport de ces deux relations donne immédiatement la densité du solide : $d = \dfrac{\rho_{\text{s}}}{\rho_{\text{e}}} = \dfrac{P}{\Pi} = 5$.

.....

1.13 a) Le poids du bloc solide vaut $\vec{P} = \rho_{\text{s}} S h\,\vec{g}$. La poussée d'Archimède est l'opposée du poids de liquide déplacé, à savoir $\vec{\Pi} = -\rho_\ell S(h - x)\,\vec{g}$. Ainsi, la résultante des forces vaut $\vec{R} = \big[\rho_{\text{s}} h - \rho_\ell (h - x)\big] S\,\vec{g}$.

.....

1.13 b) La condition d'équilibre mécanique $\vec{R} = \vec{0}$ donne $\rho_{\text{s}} h - \rho_\ell (h - x) = 0$ et donc $x = h\left(\dfrac{\rho_\ell - \rho_{\text{s}}}{\rho_\ell}\right)$.

.....

1.13 c) La résultante des forces vaut maintenant $\vec{R} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F}$. En faisant $x = 0$ dans l'expression obtenue à la question a), on trouve :

$$\vec{R} = (\rho_s h - \rho_\ell h) S\, \vec{g} + \vec{F}.$$

La condition d'équilibre $\vec{R} = \vec{0}$ donne alors $\vec{F} = (\rho_\ell h - \rho_s h) S\, \vec{g}$, d'où $\|\vec{F}\| = |(\rho_\ell h - \rho_s h) S| g = (\rho_\ell - \rho_s) S h g$.

.....

1.14 a) La proposition (a) est homogène car ρ_s/ρ_e est sans dimension et h est homogène à une longueur.

La formule (b) n'est pas homogène à cause de la racine cubique.

La formule (c) n'est pas homogène non plus car on ajoute une longueur (h) à une masse volumique (ρ_s).

Enfin, la proposition (d) n'est pas homogène car le produit d'une masse volumique par une longueur ne peut pas donner une longueur.

.....

1.14 b) Le volume immergé s'écrit $V_{\text{imm}} = \dfrac{1}{3} S'(h - x)$, où S' est l'aire de la base du volume conique immergé. Si l'on note r' le rayon de cette base, on a :

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \left(\frac{h-x}{h}\right)^2,$$

où la dernière égalité utilise les relations de Thalès (r est le rayon de la base de l'iceberg et r' celui du cône immergé). On en déduit :

$$V_{\text{imm}} = \frac{1}{3} \frac{S(h-x)^3}{h^2}.$$

.....

1.14 c) Le poids du cône vaut $\vec{P} = m\vec{g}$, avec $m = \dfrac{1}{3} S h \rho_s$ et S l'aire de la base du cône.

Quant à la poussée d'Archimède, on a $\vec{\Pi} = -m_d \vec{g}$, où m_d désigne la masse de liquide déplacé par l'immersion du cône. On a $m_d = \rho_e V_{\text{imm}} = \dfrac{1}{3} \dfrac{S(h-x)^3}{h^2} \rho_e$, d'où $\vec{\Pi} = -\dfrac{1}{3} \dfrac{S(h-x)^3}{h^2} \rho_e \vec{g}$. La condition d'équilibre $\vec{\Pi} + \vec{P} = \vec{0}$ donne :

$$\left[\frac{1}{3} S h \rho_s - \frac{1}{3} S \frac{(h-x)^3}{h^2} \rho_e\right] \vec{g} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad x = h\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_s}{\rho_e}}\right).$$

.....

1.15 a) La masse m_B peut se décomposer en notant m_{liq} la masse de la partie liquide et $m_{\text{glaçon}}$ celle des glaçons :

$$m_B = m_{\text{liq}} + m_{\text{glaçon}} = \rho_e (V_{\text{tot}} - V_{\text{im}}) + m_{\text{glaçon}},$$

en notant ρ_e la masse volumique de l'eau, V_{tot} le volume total du verre (égal à celui du verre A) et V_{im} le volume immergé des glaçons.

Par ailleurs, l'équilibre mécanique des glaçons donne d'après le PFD : $m_{\text{glaçon}} = \rho_e V_{\text{im}}$. Ainsi, $m_B = \rho_e V_{\text{tot}} = m_A$.

.....

1.15 b) Le polystyrène étant moins dense que la glace, il est aussi moins dense que l'eau. Par conséquent, les boules flottent. Ayant la même masse que les glaçons, les boules de polystyrène présenteront un volume immergé identique à la situation précédente. La hauteur sera donc identique.

.....

1.15 c) Le fer est plus dense que l'eau, donc les boules coulent. On note V_{sb1} et V_{sb2} respectivement les volumes submergés avec les glaçons et avec les boules de fer. On a les relations :

$$V_{\text{sb1}} = V_{\text{liq}} + V_{\text{im}} \qquad \text{et} \qquad V_{\text{sb2}} = V_{\text{liq}} + V_{\text{Fe}}.$$

De plus, comme les boules de fer sont de même masse que les glaçons : $m_{\text{glaçon}} = \rho_e V_{\text{im}} = m_{\text{Fe}} = \rho_{\text{Fe}} V_{\text{Fe}}$, en notant

ρ_{Fe} la masse volumique du fer et V_{Fe} leur volume. Ainsi : $V_{\text{Fe}} = \left(\dfrac{\rho_e}{\rho_{\text{Fe}}}\right) V_{\text{im}}$. Ainsi, on a :

$$V_{\text{sb2}} = V_{\text{liq}} + \left(\frac{\rho_e}{\rho_{\text{Fe}}}\right) V_{\text{im}},$$

avec $\dfrac{\rho_e}{\rho_{\text{Fe}}} < 1$. Ainsi, $V_{\text{sb2}} < V_{\text{sb1}}$: le niveau diminue.

.....

1.16 a) La masse molaire d'un mélange s'obtient en effectuant la moyenne pondérée des masses molaires :

$$\begin{aligned} M &= 0{,}96M(\text{CO}_2) + 0{,}02M(\text{Ar}) + 0{,}02M(\text{N}_2) \\ &= 0{,}96 \times 44\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1} + 0{,}02 \times 40\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1} + 0{,}02 \times 28\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1} = 43{,}6\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}. \end{aligned}$$

.....

1.16 b) En partant de l'équation d'état des gaz parfaits, on a :

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT \quad \text{donc} \quad \frac{pM}{RT} = \frac{m}{V} = \rho.$$

L'application numérique donne : $\rho = \dfrac{6 \times 10^2\,\text{Pa} \times 43{,}6 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}}{8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} \times 213{,}15\,\text{K}} = 14{,}8\,\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$.

.....

1.16 c) On remplace ρ par son expression trouvée précédemment et on obtient alors une équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{\text{d}p}{\text{d}z} = -\rho g = -\frac{Mg}{RT}p \quad \text{donc} \quad \frac{\text{d}p}{\text{d}z} + \frac{p}{z_0} = 0.$$

Ainsi, on a :

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right) \qquad \text{avec } z_0 = \frac{RT}{Mg}.$$

.....

1.16 d) On calcule $H = 5z_0 = 5\dfrac{8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} \times 213{,}15\,\text{K}}{43{,}6 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1} \times 3{,}72\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = 55\,\text{km}$.

.....

1.17 a) En effet, on a $\dfrac{\text{d}p}{\text{d}z} = \dfrac{p(z+\text{d}z) - p(z)}{\text{d}z}$, ce qui donne l'équation différentielle $\dfrac{\text{d}p}{\text{d}z} = -\dfrac{2p}{z_{\text{max}}}$.

.....

1.17 b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du type $y' + ay = 0$.

La solution s'écrit $p(z) = A\,\text{e}^{-2z/z_{\text{max}}}$, avec A une constante d'intégration que l'on détermine à l'aide de la contrainte $p(z=0) = p_0$. On trouve $p(z) = p_0\,\text{e}^{-2z/z_{\text{max}}}$.

.....

1.18 a) Le champ de pression ne dépend que de z. La projection selon (Oz) donne alors :

$$\frac{\text{d}p}{\text{d}z} = -\rho g = -\frac{ag}{p_0}p.$$

Par conséquent, on aboutit à l'équation différentielle :

$$\frac{\text{d}p}{\text{d}z} + \frac{ag}{p_0}p = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les solutions s'écrivent $p(z) = C_1\text{e}^{-agz/p_0}$.

On détermine la constante d'intégration C_1 à l'aide des conditions aux limites :

$$p(z=0) = p_0 = C_1 \quad \text{d'où} \quad p(z) = p_0\text{e}^{-agz/p_0}.$$

1.18 b) Le champ de pression ne dépend que de z. La projection de l'équation de la statique suivant (Oz) donne :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + bg\,p = -ag + bgp_0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du première ordre avec un second membre constant. Les solutions de l'équation homogène se mettent sous la forme $p_\mathrm{h}(z) = C_2\mathrm{e}^{-bgz}$, et il est facile de trouver une solution particulière constante : $p_\mathrm{part} = p_0 - \dfrac{a}{b}$. La solution générale s'écrit donc :

$$p(z) = p_\mathrm{h}(z) + p_\mathrm{part} = C_2\mathrm{e}^{-bgz} + p_0 - \frac{a}{b}.$$

Il ne nous reste plus qu'à déterminer C_2 à l'aide de la condition aux limites :

$$p(z=0) = p_0 = C_2 + p_0 - \frac{a}{b} \quad \text{d'où} \quad p(z) = p_0 + \frac{a}{b}\left(\mathrm{e}^{-bgz} - 1\right).$$

1.18 c) Le champ de pression ne dépend que de z. La projection de l'équation de la statique suivant (Oz) donne :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -ag + bg\mathrm{e}^{-z/c}.$$

On obtient $p(z)$ en cherchant la primitive de $-ag + bg\mathrm{e}^{-z/c}$, à savoir : $p(z) = -agz - bcg\mathrm{e}^{-z/c} + C_3$.
La condition $p(0) = p_0$ impose $bcg + C_3 = p_0$, soit $C_3 = p_0 - bcg$. Finalement, on trouve :

$$p(z) = p_0 - agz + bcg\left(1 - \mathrm{e}^{-z/c}\right).$$

1.19 a) Projetons l'équation de la statique sur les trois axes cartésiens. On trouve :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho a \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

La première relation implique que le champ de pression ne dépend que de y et z.
Intégrons la deuxième relation :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho a \quad \text{donc} \quad p(y,z) = \rho a y + f(z).$$

Dérivons cette dernière relation par rapport à z : $\dfrac{\partial p}{\partial z} = f'(z)$. Par identification avec la troisième projection, on trouve :

$$f'(z) = -\rho g \quad \text{donc} \quad f(z) = -\rho g z + C.$$

Le champ de pression se met sous la forme $p(y,z) = \rho a y - \rho g z + C$. Déterminons la constante d'intégration C à l'aide de la condition aux limites :

$$p(y=0, z=0) = p_0 = C \quad \text{d'où} \quad p(y,z) = \rho(ay - gz) + p_0.$$

1.19 b) La surface libre est l'ensemble des points du liquide soumis à une pression p_0 :

$$p(y,z) = \rho(ay - gz) + p_0 = p_0 \quad \text{donne} \quad z = \frac{a}{g}y.$$

Il s'agit de l'équation d'un plan incliné d'un angle $\alpha = \arctan(a/g)$.

1.20 a) On calcule

$$\begin{aligned} F_p &= \iint p(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint \rho g(h-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \rho g \int_0^L \mathrm{d}y \int_0^h (h-z)\,\mathrm{d}z = \rho g L \Big[hz - \frac{z^2}{2}\Big]_0^h \\ &= \rho g L (h^2 - \frac{h^2}{2}) = \frac{1}{2}\rho g L h^2. \end{aligned}$$

.....

1.20 b) On calcule

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p &= \iint z\ p(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint \rho g(hz - z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \rho g \int_0^L \mathrm{d}y \int_0^h (hz - z^2)\,\mathrm{d}z = \rho g L \Big[\frac{hz^2}{2} - \frac{z^3}{3}\Big]_0^h \\ &= \rho g L (\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}) = \frac{1}{6}\rho g L h^3. \end{aligned}$$

.....

1.20 c) On a $z_C = \dfrac{\mathcal{M}_p}{F_p} = \dfrac{\frac{1}{6}\rho g L h^3}{\frac{1}{2}\rho g L h^2} = \dfrac{1}{3}h.$

.....

1.21 a) La pression au niveau de la mer, dans les conditions usuelles, vaut sensiblement $1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$.

.....

1.21 b) La pression est une force surfacique donc $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$ avec $1\,\mathrm{m}^2 = 10^4\,\mathrm{cm}^2$.

On a donc une pression de $10\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{cm}^{-2}$.

.....

1.21 c) Une pression de $1\,\mathrm{bar} = 10\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{cm}^{-2}$, sur une surface de $10\,\mathrm{cm}^2$, donne une force qui vaut :

$$10\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{cm}^{-2} \times 10\,\mathrm{cm}^2 = 100\,\mathrm{N}.$$

.....

1.22 a) Pour l'air, $\vec{u} = \vec{e_x}$ et le champ de pression est uniforme, égal à p_0. On a $\vec{F_1} = p_0 S\vec{e_x} = p_0 h L\vec{e_x}$.

.....

1.22 b) Pour l'eau, $\vec{u} = -\vec{e_x}$. On a :

$$F_2 = \int_{y=0}^{L} \mathrm{d}y \int_{z=-h}^{0} (p_0 - \mu g z)\,\mathrm{d}z = L \times \Big[p_0 z - \mu g \frac{z^2}{2}\Big]_{-h}^{0} \quad \text{donc} \quad \vec{F_2} = -\Big(p_0 + \frac{\mu g h}{2}\Big) h L \vec{e_x}.$$

.....

1.22 c) La résultante des forces s'écrit $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.

.....

1.23 a) La hauteur de la colonne de fluide ΔH vaut $h(x,z,t) - z$. Ainsi $p(x,z,t) = p_0 + \mu g(h(x,t) - z)$.

.....

1.23 b) La section de ce volume vaut $(h(x,t) - f(x)) \times L$. Ainsi, on a $\mathrm{d}V = (h(x,t) - f(x))L\,\mathrm{d}x$.

.....

1.23 c) La force élémentaire selon $(\mathrm{O}x)$ vaut $\mathrm{d}F_x = -\mu g \dfrac{\partial h}{\partial x} \times (h(x,t) - f(x)) \times L\,\mathrm{d}x$.

.....

1.24 a) La masse volumique vaut $\rho = \dfrac{\delta m}{\mathrm{d}V} = \dfrac{M_{\text{air}}\delta n}{\mathrm{d}V}$.

.....

1.24 b) Si on assimile l'air de l'atmosphère à un gaz parfait, on a $\rho = \dfrac{M_{\text{air}}\delta n}{dV} = \dfrac{M_{\text{air}} p}{RT_0}$.

1.24 c) Au niveau de l'océan, la pression est de 1 bar soit 1×10^5 Pa. La masse volumique vaut :

$$\rho = \frac{29 \times 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1} \times 10^5\,\text{Pa}}{8{,}314\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 288\,\text{K}} = 1{,}2\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

1.25 a) La masse volumique de l'eau est $\rho_0 = \dfrac{1\,\text{kg}}{1\,\text{L}} = \dfrac{1\,\text{kg}}{1 \times 10^{-3}\,\text{m}^3}$.

1.25 b) La masse volumique ρ est constante. On a $\displaystyle\int_{p(z)}^{p(0)=p_0} \mathrm{d}p = \int_z^0 -\rho_0 g\,\mathrm{d}z$ donc $p(z) = p_0 - \rho_0 g z$.

1.25 c) On a $pV = nRT_0 = \dfrac{m}{M}RT_0$ donne $\rho(z) = \dfrac{m}{V} = \dfrac{p(z)M}{RT_0}$.

1.25 d) L'équation différentielle est $\dfrac{dp}{dz} + \dfrac{Mg}{RT_0}p(z) = 0$ avec la condition initiale $p(z=0) = p_0$.

On calcule : $\displaystyle\int_{p(z)}^{p(0)=p_0} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int_z^0 -\frac{Mg}{RT_0}\,\mathrm{d}z$, ce qui conduit à $p(z) = p_0 \exp\left(-\dfrac{Mgz}{RT_0}\right)$.

1.25 e) On utilise $\rho(z) = \dfrac{m}{V} = \dfrac{p(z)M}{RT(z)}$, ce qui donne l'équation $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{Mg}{R(T_0 - \alpha z)}\,\mathrm{d}z$. On calcule :

$$\int_{p(z)}^{p(0)=p_0} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int_z^0 -\frac{Mg}{R(T_0 - \alpha z)}\,\mathrm{d}z,$$

ce qui conduit à $\ln\left(\dfrac{p(z)}{p_0}\right) = \dfrac{Mg}{R\alpha} \times \ln\left(\dfrac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)$ et donc $p(z) = p_0\left(\dfrac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\alpha R}}$.

1.26 a) L'altitude z_0 est telle que $p(z = z_0) = \dfrac{p_0}{2} = p_0 \mathrm{e}^{-z_0/H}$ et vaut donc $z_0 = H\ln(2)$.

1.26 b) On fait un développement limité de $p(z)$ à l'ordre 1 et l'on obtient $p(z) \approx p_0\left(1 - \dfrac{z}{H}\right)$.

1.26 c) La diminution de pression vérifie $\Delta p = p_0 \dfrac{\Delta z}{H}$ où $\Delta z \approx 1{,}7\,\text{m}$ est la différence d'altitude entre les pieds et la tête. Ainsi $\dfrac{\Delta p}{p_0} \approx 2 \times 10^{-2}\,\%$.

1.27 a) On a $-\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\vec{e_z} = \mu g \vec{e_z}$.

1.27 b) On écrit $\delta\overrightarrow{F_P} = P(z)\,\mathrm{d}\vec{S} = P(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x} = (P_0 - \mu g z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x}$. En intégrant sur toute la surface, on a :

$$\overrightarrow{F_P} = \iint_{(S)} P(z)\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_{y=0}^{L}\int_{z=0}^{h} (P_0 - \mu g z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x} = L\vec{e_x}\left[P_0 z - \frac{\mu g}{2}z^2\right]_0^h = L\left(P_0 h - \mu g\frac{h^2}{2}\right)\vec{e_x}.$$

1.28 a) Comme le gradient est constant, on a $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\vec{e_x} = \dfrac{P(x_2) - P(x_1)}{x_2 - x_1}\vec{e_x}$. Avec les conditions données, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\vec{e_x} = \frac{P_2 - P_1}{L}\vec{e_x}.$$

1.28 b) En primitivant la composante selon (Ox) et en utilisant les conditions aux limites, on obtient :

$$\frac{P_2 - P_1}{L}(x - x_1) + P_1.$$

.....

1.28 c) On a :

$$\delta\overrightarrow{F_P} = P(L)\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\left[\frac{P_2 - P_1}{L}(L - x_1) + P_1\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}.$$

Sachant que $P(x)$ ne dépend ni de y ni de z, on obtient par intégration : $\overrightarrow{F_P} = \left[\dfrac{P_1 - P_2}{L}(L - x_1) + P_1\right]S\overrightarrow{e_x}$.

.....

1.29 c) La résultante des forces de pression suivant (Ox) est la somme algébrique de la force pressante qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ à la cote x et sur la surface $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ à la cote $x + \mathrm{d}x$. La surface faisant déjà intervenir le produit $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, on peut considérer la pression comme égale à $P(x, y, z)$ en tout point de la surface en x et à $P(x + \mathrm{d}x, y, z)$ sur la surface en $x + \mathrm{d}x$.

Il vient en projection sur (Ox) : $\mathrm{d}F_{Px} = [+P(x, y, z) - P(x + \mathrm{d}x, y, z)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Par un développement de Taylor-Young limité au premier ordre en $\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\mathrm{d}F_{Px} = \left[-\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}F_{Px} = -\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau.$$

.....

1.29 d) La résultante des forces de pression suivant (Oy) est la somme algébrique de la force pressante qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ à la cote y et sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ à la cote $y + \mathrm{d}y$.

Comme précédemment, il vient en projection sur (Oy) : $\mathrm{d}F_{Py} = [+P(x, y, z) - P(x, y + \mathrm{d}y, z)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Un développement de Taylor-Young limité au premier ordre en $\mathrm{d}y$ donne :

$$\mathrm{d}F_{Py} = \left[-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}F_{Py} = -\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}\tau.$$

.....

1.29 e) La résultante des forces de pression suivant (Oz) est la somme algébrique de la force pressante qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ à la cote z et sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ à la cote $z + \mathrm{d}z$.

On a : $\mathrm{d}F_{Pz} = [+P(x, y, z) - P(x, y, z + \mathrm{d}z)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, qui donne par le même raisonnement que précédemment :

$$\mathrm{d}F_{Pz} = \left[-\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}F_{Pz} = -\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau.$$

.....

1.29 f) En reprenant les résultats précédents, la résultante des forces pressantes exercée sur le volume particulaire $\mathrm{d}\tau$ s'écrit : $\mathrm{d}\overrightarrow{F_P} = -\left[\dfrac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\partial P}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \dfrac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e_z}\right]\mathrm{d}\tau$, d'où $\overrightarrow{f_P} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{F_P}}{\mathrm{d}\tau} = -\left[\dfrac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\partial P}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \dfrac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e_z}\right]$.

.....

1.30 a) La résultante des forces de pression s'écrit $\overrightarrow{F_P} = -\displaystyle\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}\overrightarrow{S}$. Si la pression est uniforme, tous les vecteurs opposés se compensent deux à deux d'où $\overrightarrow{F_P} = \overrightarrow{0}$.

.....

1.30 b) Pour que la distribution initiale des pressions, avec P_2 sur S_2, soit la même que la superposition de P_1 uniforme partout et de P' extérieure sur S_2, il faut que $P' = P_2 - P_1$.

.....

1.30 c) On calcule la résultante des forces de pression sur Σ en utilisant la superposition des deux distributions précédentes. La contribution pour P_1 uniforme donne une résultante nulle (voir question a).

La contribution pour P' donne : $\overrightarrow{F_P} = -P'S_2\overrightarrow{e_z}$, soit $\overrightarrow{F_P} = (P_1 - P_2)S_2\overrightarrow{e_z}$.