Énoncés

Champ magnétique

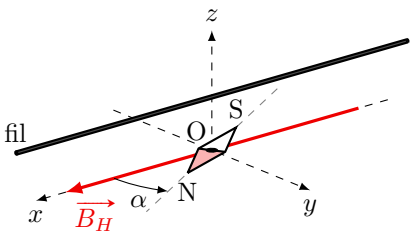
Pour commencer

Entraînement 1.1 — Équilibre d'une boussole.

Une aiguille aimantée de centre O est libre de tourner sans frottements autour d'un axe vertical (Oz). Elle s'oriente à l'équilibre suivant $\overrightarrow{B_H} = B_H\vec{e_x}$.

Un fil conducteur de grande longueur devant la taille de l'aiguille est placé à la distance $d = 2\,\text{cm}$ au-dessus de O, parallèlement à l'axe (Ox). Le champ magnétique créé en O par le fil vaut :

$$\overrightarrow{B_{\text{fil}}}(O) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{e_y}.$$



Lorsqu'un courant d'intensité $I = 1{,}2\,\text{A}$ circule dans ce fil dans le sens des x croissants, la boussole retrouve une position d'équilibre en tournant d'un angle $\alpha = 30°$ comme indiqué sur la figure.

a) Exprimer B_H en fonction de μ_0, I, d et α .....

b) Donner la valeur numérique de B_H .....

Calculs de flux magnétiques

Le flux Φ du champ magnétique à travers une surface S reposant sur un contour orienté et fermé s'écrit :

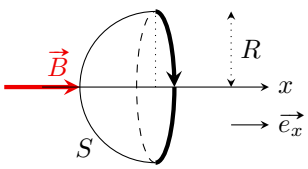
$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S},$$

où le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est orienté par la règle de Maxwell.

On sait par ailleurs que $\vec{B}$ est un champ vectoriel à flux conservatif : le flux de $\vec{B}$ sortant de toute surface fermée est nul.

Entraînement 1.2 — Flux d'un champ uniforme à travers une demi-sphère.

On considère la surface suivante, une demi-sphère de rayon R et d'axe (Ox) :



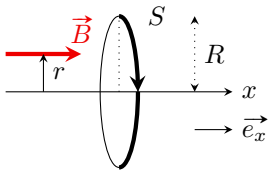
Combien vaut le flux du champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_x}$ à travers cette surface ?

(a) $\phi = 0$ (b) $\phi = 2B\pi R^2$ (c) $\phi = B\pi R^2$

Entraînement 1.3 — Flux d'un champ non uniforme à travers un disque.

On considère un champ magnétique $\vec{B}$ défini par :

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = B_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e_x},$$



où M est repéré à l'aide des coordonnées cylindriques r, θ et x.
Ainsi, r est la distance du point à l'axe $(\mathrm{O}x)$.

On souhaite calculer le flux ϕ de ce champ à travers le disque de rayon R et d'axe $(\mathrm{O}x)$ orienté comme indiqué sur la figure. Il est défini par :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

où $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{e_x}$ avec $\mathrm{d}S$ élément de surface du disque en un point M quelconque du disque.

On rappelle que l'expression de $\mathrm{d}S$ en coordonnées cylindriques est :

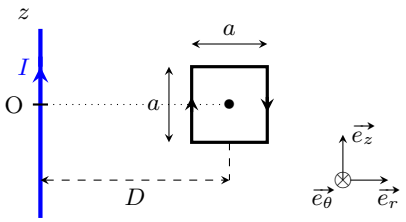
$$\mathrm{d}S = r \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \mathrm{d}r.$$

Exprimer ϕ en fonction de R et B_0 .....

Entraînement 1.4 — Flux à travers un cadre du champ créé par un fil.

Considérons un fil rectiligne infiniment long suivant l'axe $(\mathrm{O}z)$, parcouru par un courant d'intensité I circulant dans le sens des z croissants. Le champ magnétique créé par ce fil, en un point M à la distance r de l'axe $(\mathrm{O}z)$, est :

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}.$$



Nous souhaitons calculer le flux ϕ de ce champ à travers le cadre carré de côté a orienté comme indiqué sur la figure. Il est défini par :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

où $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{e_\theta}$ avec $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}z$ élément de surface du cadre en un point M quelconque du cadre.

a) Exprimer ϕ en fonction de a, D, μ_0 et I .....

b) Donner un équivalent de ϕ si $a \ll D$ .....

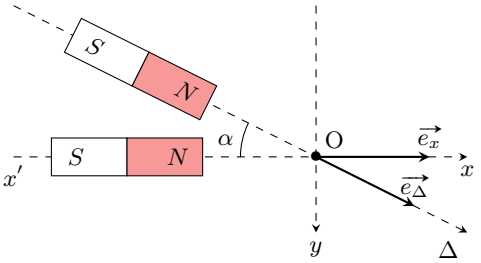
c) Que vaut ϕ si le cadre est situé dans un plan perpendiculaire à $(\mathrm{O}z)$? ....

Superposition de champs

Entraînement 1.5 — Champ de deux aimants droits.

On approche le pôle Nord d'un aimant droit d'axe Δ du pôle Nord d'un aimant droit identique d'axe $(x'x)$.

On donne les champs créés par les aimants en O : $\overrightarrow{B_1} = B_0\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{B_2} = B_0\overrightarrow{e_\Delta}$ avec $B_0 = 20\,\text{mT}$.



Le champ magnétique résultant de la superposition de $\overrightarrow{B_1}$ et $\overrightarrow{B_2}$ en O sera noté $\overrightarrow{B}(\text{O})$.

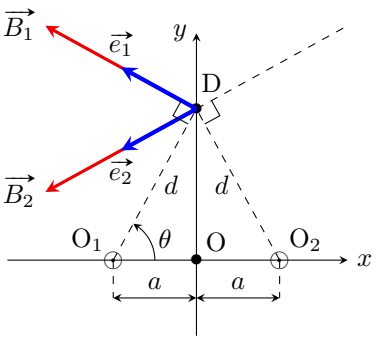
a) Exprimer $\overrightarrow{B}(\text{O})$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$, en fonction de B_0 et α .....

b) Exprimer la norme $B(\text{O})$ de $\overrightarrow{B}(\text{O})$, en fonction de B_0 et $\cos(\alpha)$ .....

c) Calculer $B(\text{O})$ pour $\alpha = 60°$ .....

Entraînement 1.6 — Champ magnétique créé par deux fils.

Deux fils colinéaires à l'axe $(\text{O}z)$ et parcourus par un courant d'intensité I coupent le plan $(x\text{O}y)$ respectivement en O_1 et O_2, comme représenté ci-dessous :



Ces fils passant par O_1 et par O_2 créent, au point $\text{D}(0, y)$, respectivement, les champs $\overrightarrow{B_1}$ et $\overrightarrow{B_2}$ vérifiant

$$\overrightarrow{B_1} = B_0\,\overrightarrow{e_1} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{B_2} = B_0\,\overrightarrow{e_2}.$$

On donne $B_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}$, où d est la distance commune de D aux points O_1 et O_2.

Le vecteur $\overrightarrow{e_1}$ est un vecteur unitaire orthogonal à la droite (O_1D) ; de même pour $\overrightarrow{e_2}$.

Le champ magnétique résultant de la superposition de $\overrightarrow{B_1}$ et $\overrightarrow{B_2}$ en D sera noté $\overrightarrow{B_{\text{tot}}}$.

a) Exprimer d en fonction de a et θ .....

b) Exprimer $\overrightarrow{e_1}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ .....

c) Exprimer $\vec{e_2}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ .....

d) Exprimer $\overrightarrow{B_{\text{tot}}}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ en fonction de B_0 et θ .....

Le champ $\overrightarrow{B_{\text{tot}}}$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{B_{\text{tot}}} = \frac{\mu_0 I}{\pi} f(y) \vec{e_x}.$$

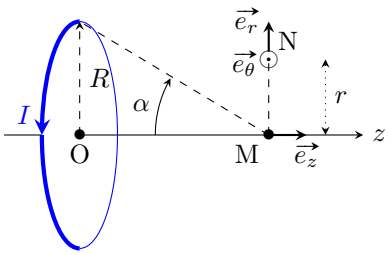
e) Expliciter la fonction $f(y)$ en fonction de a et y .....

f) Donner les valeurs de y pour lesquelles $\left|f(y)\right|$ est maximale .....

Champs magnétiques créés par des courants

Entraînement 1.7 — Champ créé sur l'axe par une spire circulaire.

On considère une spire circulaire de centre O, d'axe (Oz) et de rayon R, parcourue par un courant d'intensité $I > 0$ constante circulant dans le sens indiqué sur la figure.



Le champ magnétique créé par cette spire en M$(0, 0, z)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{B_{\text{axe}}}(\text{M}) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{e_z},$$

où α est l'angle orienté dans le sens horaire sous lequel M voit le rayon de la spire.
Le vecteur $\overrightarrow{B_{\text{axe}}}(\text{M})$ peut également s'écrire en fonction de z. Il prendra alors la forme suivante :

$$\overrightarrow{B_{\text{axe}}}(\text{M}) = \frac{\mu_0 I}{2R} f(z) \vec{e_z}.$$

a) Exprimer $\sin(\alpha)$ en fonction de z et de R .....

b) Exprimer $f(z)$ en fonction de z et de R .....

On note B_1 l'intensité du champ $\overrightarrow{B_{\text{axe}}}(\text{M})$ quand $z = R$.

c) Exprimer B_1 en fonction de μ_0, I et R .....

d) Pour quelle valeur de $z > 0$ a-t-on $\left\|\overrightarrow{B_{\text{axe}}}(\text{M})\right\| = \dfrac{B_1}{2}$? .....

Entraînement 1.8 — Expression du champ sur l'axe créé par un solénoïde.

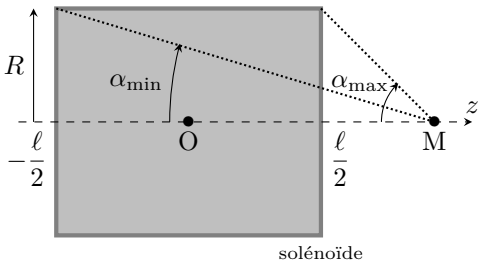
Le champ magnétique créé par un solénoïde de longueur ℓ et de rayon R en un point M de son axe (Oz) s'écrit :

$$\vec{B}(\text{M}) = B(\text{M})\vec{e_z},$$

avec

$$B(\text{M}) = \frac{\mu_0 n I}{2}\Big(\cos(\alpha_{\min}) - \cos(\alpha_{\max})\Big),$$

où $\alpha_{\min}$ et $\alpha_{\max}$ sont les angles sous lesquels les extrémités du solénoïde sont vues depuis M de coordonnées $(0, 0, z)$.



On rappelle que I est l'intensité du courant qui traverse chaque spire et n le nombre de spires par unité de longueur. L'origine O de l'axe (Oz) se trouve au milieu du solénoïde.

a) Exprimer $B(\text{M})$ en fonction de μ_0, n, I, R, ℓ et z .....

b) Que vaut $B(\text{O})$ pour ℓ quelconque ? .....

c) Que vaut le rapport $\dfrac{B\left(\pm\dfrac{\ell}{2}\right)}{B(\text{O})}$? .....

d) Vers quelle valeur tend $B(\text{O})$ si $\dfrac{\ell}{R} \to +\infty$? .....

Champs solutions d'une équation différentielle

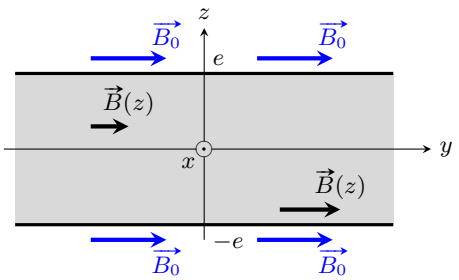
Entraînement 1.9 — Champ magnétique d'une plaquette supraconductrice.

En tout point M d'une plaque supraconductrice d'épaisseur $2e$, le champ magnétique est de la forme :

$$\vec{B}(\text{M}) = B(z)\vec{e_y}.$$

$B(z)$ est une **fonction paire** vérifiant l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 B(z)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{B(z)}{\delta^2} = 0,$$



où δ est homogène à une longueur.

Le champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B_0}$ permet d'écrire $B(-e) = B(e) = B_0$ par continuité du champ.

La fonction cosinus hyperbolique ($\cosh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$) pourra être utilisée.

a) Déterminer $B(z)$ en fonction de B_0, δ, e et z .....

b) Calculer $\dfrac{B(0)}{B_0}$ pour $e = \delta/10$ .....

c) Calculer $\dfrac{B(0)}{B_0}$ pour $e = 10\delta$ .....

Entraînement 1.10 — Évolution temporelle d'un champ uniforme.

On considère un champ magnétique uniforme et dépendant du temps $B(t)\vec{e_z}$ et on suppose que la fonction $B(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2B(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\big(B(t) - B_0\big) = 0, \qquad (*)$$

où ω_0, Q et B_0 sont des constantes. On suppose que $Q > 1/2$.

a) Quelle est l'équation caractéristique associée à $(*)$? ...

b) Combien vaut son discrimimant Δ ? .....

c) Quel est le signe de Δ ? .....

d) Donner une solution particulière de $(*)$ .....

e) Résoudre l'équation différentielle $(*)$ .....

Les conditions initiales du problème sont : $B(0) = 0$ et $B'(0) = 0$.

f) Déterminer complètement $B(t)$ .....

Une analyse dimensionnelle

Entraînement 1.11 — Le magnéton de Bohr.

Le magnéton de Bohr μ_B, qui est homogène à un moment magnétique, s'exprime en fonction de e (charge élémentaire), m_e (masse de l'électron) et h (constante de Planck) suivant la relation :

$$\mu_B = \frac{1}{4\pi}\, e^{\alpha} \cdot m_e^{\beta} \cdot h^{\gamma}.$$

On cherche à évaluer α, β et γ par une analyse dimensionnelle. Pour cela, on utilise les deux données suivantes :

- le système international d'unités impose que le moment magnétique s'exprime en $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2$;
- l'énergie d'un photon est proportionnelle à sa fréquence ν : $E = h\nu$.

Donner la valeur de (α, β, γ) .....

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Champ magnétique

Réponses

1.1 a) $\boxed{\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d \tan(\alpha)}}$

1.1 b) $\boxed{20{,}8\,\mu\mathrm{T}}$

1.2 $\boxed{\text{(c)}}$

1.3 $\boxed{\dfrac{\pi}{2} B_0 R^2}$

1.4 a) $\boxed{\dfrac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\dfrac{D + a/2}{D - a/2}\right)}$

1.4 b) $\boxed{\phi \approx \dfrac{\mu I a^2}{2\pi D}}$

1.4 c) $\boxed{\text{nul}}$

1.5 a) $\boxed{B_0(1+\cos(\alpha))\vec{e_x} + B_0 \sin(\alpha)\vec{e_y}}$

1.5 b) $\boxed{B_0\sqrt{2(1+\cos(\alpha))}}$

1.5 c) $\boxed{34{,}6\,\mathrm{mT}}$

1.6 a) $\boxed{\dfrac{a}{\cos(\theta)}}$

1.6 b) $\boxed{-\sin(\theta)\vec{e_x} + \cos(\theta)\vec{e_y}}$

1.6 c) $\boxed{-\sin(\theta)\vec{e_x} - \cos(\theta)\vec{e_y}}$

1.6 d) $\boxed{-2B_0 \sin(\theta)\vec{e_x}}$

1.6 e) $\boxed{-\dfrac{y}{a^2 + y^2}}$

1.6 f) $\boxed{\text{en } y = \pm a}$

1.7 a) $\boxed{\dfrac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}}$

1.7 b) $\boxed{\dfrac{R^3}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3}}$

1.7 c) $\boxed{\dfrac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\,R}}$

1.7 d) $\boxed{R\sqrt{2^{5/3} - 1}}$

1.8 a) $\boxed{\dfrac{\mu_0 n I}{2}\left(\dfrac{z + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z + \frac{\ell}{2}\right)^2}} - \dfrac{z - \frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z - \frac{\ell}{2}\right)^2}}\right)}$

1.8 b) $\boxed{\dfrac{\mu_0 n I \ell}{\sqrt{4R^2 + \ell^2}}}$

1.8 c) $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{4R^2 + \ell^2}}{\sqrt{R^2 + \ell^2}}}$

1.8 d) $\boxed{\mu_0 n I}$

1.9 a) $\boxed{B_0 \dfrac{\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{e}{\delta}\right)}}$

1.9 b) $\boxed{\dfrac{B(0)}{B_0} \approx 1}$

1.9 c) $\boxed{\dfrac{B(0)}{B_0} \approx 9 \times 10^{-5}}$

1.10 a) $\boxed{r^2 + \dfrac{\omega_0 r}{Q} + \omega_0^2 = 0}$

1.10 b) $\boxed{\left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2)}$

1.10 c) $\boxed{\Delta < 0}$

1.10 d) $\boxed{B_0}$

1.10 e) $\boxed{B_0 + \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\lambda \cos\left(\dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}\cdot t\right) + \mu \sin\left(\dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}\cdot t\right)\right)}$

1.10 f) $\boxed{B_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\left(\cos\left(\dfrac{\omega_0}{Q}\sqrt{4Q^2 - 1}\cdot t\right) + \dfrac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin\left(\dfrac{\omega_0}{Q}\sqrt{4Q^2 - 1}\cdot t\right)\right)\right.}$

1.11 $\boxed{(1, -1, 1)}$

Corrigés

1.1 a) À l'équilibre, la boussole s'oriente dans la direction du champ résultant $\vec{B}(\mathrm{O}) = \overrightarrow{B_H} + \overrightarrow{B_{\mathrm{fil}}}(\mathrm{O})$. On a alors $\tan(\alpha) = \dfrac{B_{\mathrm{fil}}}{B_H}$, d'où $B_H = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi d \tan(\alpha)}$.

.....

1.1 b) On calcule :

$$B_H = \frac{4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}} \times 1{,}2\,\mathrm{A}}{2\pi \times 2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \times \tan(30°)} = \frac{10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}} \times 1{,}2\,\mathrm{A}}{1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \times 1{,}2 \times 10^{-5}\,\mathrm{T} = 20{,}8 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}.$$

.....

1.2 Au lieu d'exprimer le flux de $\vec{B}$ à travers la demi-sphère, il est plus simple de le calculer sur le disque qui s'appuie, comme la demi-sphère, sur la même circonférence de rayon R (on utilise ici le fait que $\vec{B}$ est un champ vectoriel à flux conservatif). Sur le disque, on a $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}S\overrightarrow{e_x}$. Ainsi $\phi = B \times S_{\mathrm{disque}} = B\pi R^2$.

.....

1.3 On calcule :

$$\phi = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{B}\cdot\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}r \times r\,\mathrm{d}\theta = B_0 \times \left[\pi R^2 - \frac{2\pi R^4}{4r^2}\right] = \frac{\pi}{2}R^2 B_0.$$

.....

1.4 a) On calcule :

$$\phi = \iint_{\text{cadre}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}\cdot\mathrm{d}S\overrightarrow{e_\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^a \mathrm{d}z \times \int_{D-a/2}^{D+a/2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left(\frac{D+a/2}{D-a/2}\right).$$

.....

1.4 b) On réécrit $\phi = \dfrac{\mu_0 I a}{2\pi}\left(\ln\left(1+\dfrac{a}{2D}\right) - \ln\left(1-\dfrac{a}{2D}\right)\right)$. Un développement limité de $\ln(1\pm\varepsilon)$ à l'ordre 1 en ε avec $|\varepsilon| \ll 1$ donne alors : $\ln(1\pm\varepsilon) \approx \pm\varepsilon$. D'où $\phi \approx \dfrac{\mu I a^2}{2\pi D}$.

.....

1.4 c) Si le cadre est situé dans un plan perpendiculaire à $(\mathrm{O}z)$, on a $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}S\,\overrightarrow{e_z}$ et $\vec{B}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = 0$: le flux est nul.

.....

1.5 a) Le champ résultant en O s'écrit : $\vec{B}(\mathrm{O}) = \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2}$, soit $\vec{B}(\mathrm{O}) = B_0(1+\cos(\alpha))\overrightarrow{e_x} + B_0\sin(\alpha)\overrightarrow{e_y}$.

.....

1.5 b) On a $B(\mathrm{O}) = B_0\sqrt{(1+\cos(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha)}$. Donc, $B(\mathrm{O}) = B_0\sqrt{2(1+\cos(\alpha))}$.

.....

1.5 c) On a $B(\mathrm{O}) = 20\sqrt{3}\,\mathrm{mT}$ et donc $B(\mathrm{O}) = 34{,}6\,\mathrm{mT}$.

.....

1.6 a) On a $\cos(\theta) = \dfrac{a}{d}$ d'où le résultat.

.....

1.6 b) L'angle orienté θ, entre l'horizontale $(\mathrm{O}x)$ et la demi-droite $[\mathrm{O_1D})$ se retrouve entre la verticale $(\mathrm{O}y)$ et la perpendiculaire à $[\mathrm{O_1D})$, c'est-à-dire la direction du vecteur $\overrightarrow{e_1}$. On a donc $\overrightarrow{e_1} = -\sin(\theta)\overrightarrow{e_x} + \cos(\theta)\overrightarrow{e_y}$.

.....

1.6 c) Si on note β l'angle que fait $\overrightarrow{e_2}$ avec la verticale descendante $(-\mathrm{O}y)$, on a $\beta + \dfrac{\pi}{2} - \theta = \dfrac{\pi}{2}$, donc $\beta = \theta$. On a donc $\overrightarrow{e_2} = -\sin(\theta)\overrightarrow{e_x} - \cos(\theta)\overrightarrow{e_y}$.

.....

1.6 d) Le champ résultant en D s'écrit $\overrightarrow{B_{\mathrm{tot}}} = B_0(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})$. En utilisant les résultats précédents, on trouve

$\overrightarrow{B_{\text{tot}}} = -2B_0 \sin(\theta)\vec{e_x}$.

.....

1.6 e) On a $\sin(\theta) = \dfrac{y}{d}$. De plus, dans le triangle rectangle (O O$_1$ D), on a $d^2 = a^2 + y^2$.

Ainsi, $\overrightarrow{B_{\text{tot}}} = -\dfrac{\mu_0 I}{\pi}\dfrac{y}{a^2+y^2},\vec{e_x}$. Par conséquent, on a $f(y) = -\dfrac{y}{a^2+y^2}$.

.....

1.6 f) On calcule $f'(y) = \dfrac{-(a^2+y^2)+y\times 2y}{(a^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-a^2}{(a^2+y^2)^2}$. La fonction f' s'annule pour $|y| \to \infty$, qui renvoie $\lim\limits_{|y|\to\infty} f(y) = 0$ et, pour $|y| = a$, qui donne $\big|f(\pm a)\big| = \dfrac{1}{2a}$: c'est le maximum recherché.

.....

1.7 b) On a $B_0 f(z) = B_0 \sin^3(\alpha)$, ce qui donne $f(z) = \dfrac{R^3}{\left(\sqrt{R^2+z^2}\right)^3}$.

.....

1.7 c) Remplaçons z par R dans l'expression de B_{axe}. On trouve $B_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2R} f(R) = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\dfrac{R^3}{\left(\sqrt{2R^2}\right)^3} = \dfrac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\,R}$.

.....

1.7 d) On cherche z tel que $B_{\text{axe}}(z) = \dfrac{1}{2}B_1$, c'est-à-dire tel que :

$$\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{R^3}{\left(\sqrt{R^2+z^2}\right)^3} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\,R} \qquad \text{donc, après simplifications, tel que} \qquad \frac{R^3}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Élevons à la puissance 2/3 chaque terme de l'égalité. On obtient :

$$\frac{R^2}{R^2+z^2} = \frac{1}{\left(4\sqrt{2}\right)^{2/3}} = \frac{1}{(2^{5/2})^{2/3}} = \frac{1}{(2)^{5/3}} \qquad \text{d'où} \qquad (2)^{5/3}R^2 = R^2+z^2.$$

Finalement, on trouve $z = R\sqrt{2^{5/3}-1}$.

.....

1.8 a) On a $B(z) = \dfrac{\mu_0 nI}{2}\left(\dfrac{z+\frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2+\left(z+\frac{\ell}{2}\right)^2}} - \dfrac{z-\frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2+\left(z-\frac{\ell}{2}\right)^2}}\right)$.

.....

1.8 b) Au point O, on a $\alpha_{\max} = \pi - \alpha_{\min}$. Or $\cos(\pi-\alpha_{\min}) = -\cos(\alpha_{\min})$, ce qui donne en O :

$$\cos(\alpha_{\min}) = \frac{\ell/2}{\sqrt{R^2+\ell^2/4}}.$$

Ainsi, on a $B(\text{O}) = \mu_0 nI\cos(\alpha_{\min}) = \mu_0 nI\dfrac{\ell}{\sqrt{4R^2+\ell^2}}$.

.....

1.8 c) Remarquons déjà que la fonction $B(z)$ est une fonction paire de z. On aura donc $B\left(-\frac{\ell}{2}\right) = B\left(+\frac{\ell}{2}\right)$.

En $z = \frac{\ell}{2}$, on a $\alpha_{\max} = \frac{\pi}{2}$, donc $\cos(\alpha_{\max}) = 0$ et $\cos(\alpha_{\min}) = \frac{\ell}{\sqrt{R^2+\ell^2}}$. Ainsi, on a $\frac{B\left(\pm\frac{\ell}{2}\right)}{B(\mathrm{O})} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4R^2+\ell^2}}{\sqrt{R^2+\ell^2}}$.

.....

1.8 d) On a $B(\mathrm{O}) = \mu_0 nI\frac{\ell}{\sqrt{4R^2+\ell^2}} = \frac{\mu_0 nI}{\sqrt{1+\frac{4R^2}{\ell^2}}}$. Si $\frac{\ell}{R} \to +\infty$, alors $\frac{4R^2}{\ell^2} \longrightarrow 0$ et $B(\mathrm{O}) \longrightarrow \mu_0 nI$.

.....

1.9 a) La solution de l'équation différentielle s'écrit $B(z) = C\exp\left(\frac{z}{\delta}\right) + D\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$. La fonction $B(z)$ étant paire, on a $C = D$. D'où $B(z) = 2C\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right)$.

La condition aux limites en $z = e$ permet d'exprimer la constante C par continuité de B (forcément continu car défini en volume) : on trouve $C = \frac{B_0}{2\cosh\left(\frac{e}{\delta}\right)}$. Ainsi, on a $B(z) = B_0\frac{\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{e}{\delta}\right)}$.

.....

1.9 b) Pour $e = \delta/10$, on a $\frac{B(0)}{B_0} = \frac{1}{\cosh(1/10)} \approx 1$.

.....

1.9 c) Pour $e = 10\delta$, on a $\frac{B(0)}{B_0} = \frac{1}{\cosh(10)} \approx 9\times 10^{-5}$.

.....

1.10 b) On calcule $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 = {\omega_0}^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) = {\omega_0}^2\frac{1-4Q^2}{Q^2} = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2(1-4Q^2)$.

.....

1.10 c) En effet, on a $Q > 1/2$.

.....

1.10 d) La fonction constante B_0 est solution de $(*)$.

.....

1.10 e) Les racines de l'équation caractéristique sont $-\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre associée à $(*)$ est :

$$\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\lambda\cos\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\right) + \mu\sin\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\right)\right).$$

Donc, la solution générale de l'équation $(*)$ est $B_0 + \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\lambda\cos\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\right) + \mu\sin\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\right)\right)$.

.....

1.10 f) La condition initiale $B(0) = 0$ donne $\lambda = -B_0$. La condition initiale $B'(0) = 0$ donne $\mu = \frac{-B_0}{\sqrt{4Q^2-1}}$.

.....

1.11 On a $[\mu_B] = \left[e^\alpha \cdot m_e^\beta \cdot h^\gamma\right] = Q^\alpha \cdot M^\beta \cdot [h]^\gamma$.

La constante de Planck h est homogène au produit d'une énergie par un temps (la fréquence est homogène à l'inverse d'un temps). De plus, une énergie est homogène au produit d'une masse par une vitesse au carré. Nous obtenons donc : $[h] = \frac{M\cdot L^2}{T}$. Ainsi, on a $[\mu_B] = \frac{Q^\alpha \cdot M^{\beta+\gamma}\cdot L^{2\gamma}}{T^\gamma}$.

Le magnéton de Bohr s'exprime en $\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$. Il est donc homogène à $[\mu_B] = [I]\cdot[S] = \frac{Q\cdot L^2}{T}$.

Finalement, en comparant les équations obtenues, on obtient $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $\gamma = 1$.

.....