Énoncés

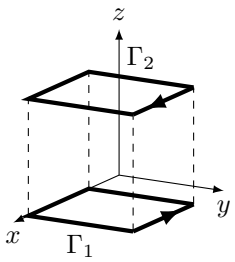
Induction (partie 2)

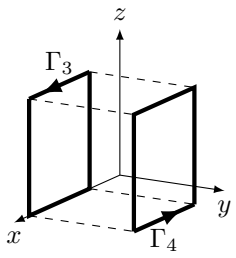
Pour commencer

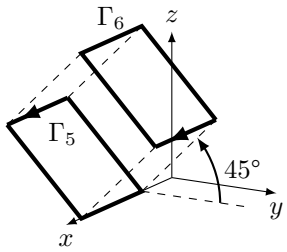
Entraînement 1.1 — Orientation d'une surface.

On associe à un contour orienté son vecteur normal en utilisant la règle dite de la main droite ou du tire-bouchon.

Pour chaque contour Γ_i orienté suivant, exprimer le vecteur normal unitaire $\vec{n_i}$ de la surface qu'il délimite en fonction des vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$.







a) $\vec{n_1}$ ..... d) $\vec{n_4}$ .....

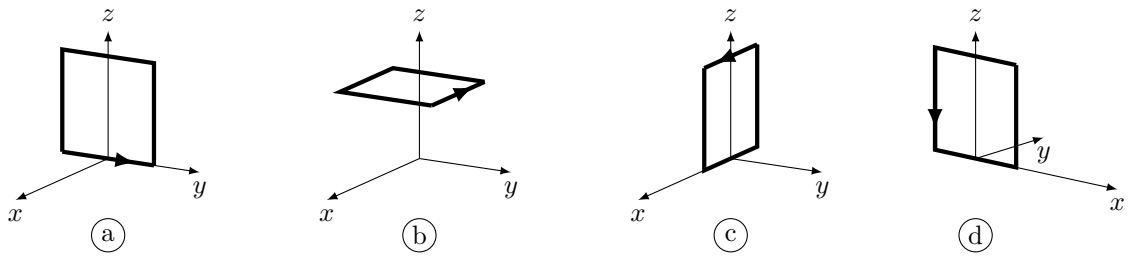
b) $\vec{n_2}$ ..... e) $\vec{n_5}$ .....

c) $\vec{n_3}$ ..... f) $\vec{n_6}$ .....

Entraînement 1.2 — Orientation d'un contour.

On associe à un contour orienté son vecteur normal en utilisant la règle dite de la main droite ou du tire-bouchon. Quelle représentation du contour pourrait correspondre aux vecteurs suivants ?

La réponse peut être « aucune » !



a) $-\vec{e_y}$ ..... ☐ c) $\vec{e_z}$ ..... ☐

b) $-\vec{e_x}$ ..... ☐ d) $\vec{e_x}$ ..... ☐

Entraînement 1.3 — Varie ou ne varie pas ? Telle est la question.

Soit un cadre de vecteur normal $\vec{n}$ et un champ magnétique $\vec{B}$.

Dans les situations suivantes, le flux de $\vec{B}$ à travers le cadre varie-t-il au cours du temps ?

Répondre par « oui » ou « non ».

On rappelle que le flux est défini par $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

a) $\vec{B}$ est uniforme et initialement $\vec{B} \wedge \vec{n} = \vec{0}$. Le cadre tourne autour d'un de ses côtés ... ☐

b) Le cadre pénètre dans une zone où règne $\vec{B}$ uniforme. $\vec{B}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires ..... ☐

c) Le champ $\vec{B}(t)$ dépend du temps et est perpendiculaire à $\vec{n}$. Le cadre est fixe et indéformable.

..... ☐

d) Le cadre est animé d'un mouvement de translation rectiligne dans $\vec{B}$ uniforme et constant.

..... ☐

e) La surface du cadre diminue. Le champ $\vec{B}$ est uniforme, colinéaire de sens opposé à $\vec{n}$.

..... ☐

f) Le cadre est fixe. Le champ $\vec{B}$ est colinéaire à $\vec{n}$, non uniforme et indépendant du temps.

..... ☐

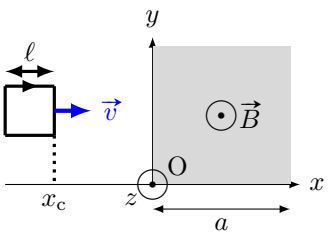
Flux du champ magnétique

Entraînement 1.4 — Flux à travers un circuit mobile (I).

On considère un circuit carré de côté ℓ se déplaçant à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e_x}$ et dont le côté droit est repéré par l'abscisse x_c.

Un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_z}$ règne dans la zone comprise entre $x = 0$ et $x = a > \ell$.

On oriente le circuit tel que $\vec{n} = -\vec{e_z}$.



Exprimer le flux du champ magnétique $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ en fonction de B, x_c, ℓ et a si :

a) $x_c < 0$ ..... c) $\ell < x_c < a$ .....

b) $0 < x_c < \ell$ ..... d) $a < x_c < a + \ell$ .....

En déduire la dérivée du flux par rapport au temps en fonction de B, v et ℓ si :

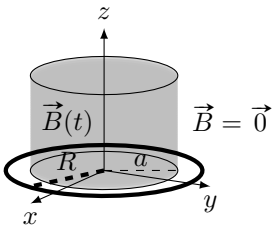
e) $x_c < 0$ ..... g) $\ell < x_c < a$ .....

f) $0 < x_c < \ell$ ..... h) $a < x_c < a + \ell$ .....

Entraînement 1.5 — Flux à travers un disque.

On considère le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$. Soit un champ magnétique uniforme

$$\vec{B} = B_m \cos(\omega t)\vec{e_z} \text{ si } r < a \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{0} \text{ si } r > a.$$



Déterminer le flux Φ du champ magnétique à travers un disque de rayon R d'axe z et de vecteur normal $\vec{e_z}$ si :

a) $R < a$ ..... b) $R > a$ .....

On considère maintenant un champ magnétique $\vec{B'}$ défini par

$$\vec{B'}(\mathrm{M}) = B_0\left(1 - \frac{r}{a}\right)\vec{e_z} \text{ si } r < a \qquad \text{et} \qquad \vec{B'} = \vec{0} \text{ si } r > a.$$

On désire exprimer son flux Φ' aussi à travers le disque de rayon R d'axe z et de vecteur normal $\vec{e_z}$.

c) Quelle sera l'expression de l'élément de surface dS du disque à considérer pour calculer le flux de $\vec{B'}$?

.....

Déterminer Φ' si :

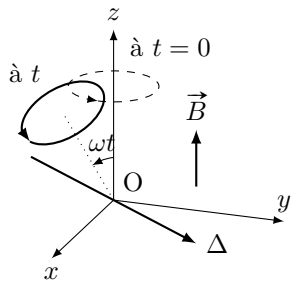
d) $R < a$ ..... e) $R > a$ .....

Entraînement 1.6 — Flux à travers un circuit mobile (II).

Dans une zone de champ magnétique uniforme

$$\vec{B} = B\vec{e_z},$$

on considère une spire orientée de rayon R en rotation autour d'un axe Δ perpendiculaire à l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω.



a) Quelle est l'expression du flux de $\vec{B}$ à travers la spire à t quelconque ? .....

Exprimer le flux en fonction de B et R pour les différentes valeurs de ωt suivantes :

b) $\frac{\pi}{2}$ .... c) $\frac{2\pi}{3}$ ... d) $\frac{11\pi}{6}$ .. e) 2π ...

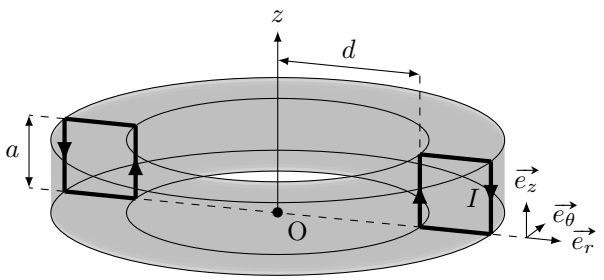
Entraînement 1.7 — Flux propre d'un tore.

Soit un tore d'axe (Oz), constitué de N spires carrées de côté a. Le champ magnétique créé par ce dispositif est tel que

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\vec{e_\theta}$$

pour $0 < z < a$ ou $d < r < d + a$, et nul sinon.

On désire, dans un premier temps, calculer le flux de ce champ à travers une seule des spires. Le vecteur normal à la spire est le vecteur $\vec{e_\theta}$.



a) Quelle sera la surface élémentaire dS à utiliser pour le calcul du flux $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}S\vec{e_\theta}$?

(a) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ (b) $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$ (c) $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ (d) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

.....

b) Quelle sera l'expression du flux à travers une spire ?

(a) $\Phi = \int_{r=d}^{a+d}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}z$

(b) $\Phi = \int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}z$

(c) $\Phi = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} r\,\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$

(d) $\Phi = \int_{r=d}^{a+d}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} r\,\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$

.....

c) En réalisant le calcul intégral, calculer Φ .....

d) En déduire l'expression du coefficient d'auto-induction L défini par $\Phi_{\text{tore}} = LI$, où Φ_{tore} désigne le flux du champ créé par le tore à travers ses N spires (aussi appelé *flux propre*).

.....

Systèmes d'équations couplées

Entraînement 1.8

Après écriture de la loi des mailles et de la relation fondamentale de la dynamique, un étudiant obtient ce système d'équations à résoudre :

$$\begin{cases} Ri + aBv = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - iBa = mg. \end{cases}$$

a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par v ?

(a) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \dfrac{a^2B^2v}{Rm} = g$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{R} = g$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{Rm} = g$

.....

b) Quelle est la dimension du coefficient $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$?

On note T *la dimension d'un temps et* M *la dimension d'une masse.*

(a) T^{-1}

(b) 1

(c) T

(d) $\mathrm{T}\cdot\mathrm{M}^{-1}$

.....

Entraînement 1.9 — Passage en complexe.

On considère un dispositif dont les équations mécaniques et électriques permettent d'établir le système suivant, où u est une tension :

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \alpha Bv = u \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -iB\alpha - kz - hv \\ v = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \end{cases}$$

Les grandeurs i, u et v sont sinusoïdales donc du type $x(t) = X_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi)$.

Leur grandeur complexe associée est du type $\underline{x}(t) = X_{\mathrm{m}}\exp(\mathrm{j}\omega t + \varphi)$ et leur amplitude complexe associée $\underline{X} = X_{\mathrm{m}}\exp(\mathrm{j}\varphi)$ (où $\mathrm{j}^2 = -1$).

a) Comment s'écrit le système après passage en complexe ?

(a) $\begin{cases} R\underline{I} + \dfrac{L}{\mathrm{j}\omega}\underline{I} - \alpha B\underline{V} = \underline{U} \\ \mathrm{j}m\omega\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - \mathrm{j}k\omega\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} R\underline{I} + \mathrm{j}L\omega\underline{I} - \alpha B\underline{V} = U_\mathrm{m}\cos(\omega t) \\ \dfrac{m}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - k\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} R\underline{I} + \mathrm{j}L\omega\underline{I} - \alpha B\underline{V} = \underline{U} \\ \mathrm{j}m\omega\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - k\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

.....

b) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{V}$ en fonction de $\underline{I}$.

.....

c) En éliminant $\underline{V}$ dans les deux premières équations du système, déterminer la bonne expression de l'impédance complexe $\underline{Z_\mathrm{eq}} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$ parmi les expressions suivantes.

(a) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \dfrac{L}{\mathrm{j}\omega} + \dfrac{\alpha^2 B^2}{h + \mathrm{j}(k\omega - \frac{m}{\omega})}$

(b) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \mathrm{j}L\omega + \alpha^2 B^2\left(h + \mathrm{j}\left(m\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)\right)$

(c) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \mathrm{j}L\omega + \dfrac{\alpha^2 B^2}{h + \mathrm{j}(m\omega - \frac{k}{\omega})}$

(d) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = \dfrac{R + \mathrm{j}L\omega + \alpha^2 B^2}{\left(h + \mathrm{j}\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\right)}$

.....

Entraînement 1.10 — Bilan de puissance.

On considère le système d'équations électrique (EE) et mécanique (EM) suivant avec la force électromotrice induite $e = -Bav$, avec la force de Laplace de valeur $f_\mathrm{L} = Bai$ et où f est une force exercée par un opérateur extérieur :

$$\begin{cases} e = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f + f_\mathrm{L} & \text{(EM).} \end{cases}$$

On rappelle que l'énergie cinétique de la barre est $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ *et que la puissance dissipée par effet Joule est* $\mathcal{P}_J = Ri^2$.

a) Exprimer, en fonction de R et i, le terme $Bavi$ à partir de e dans (EE) ...

b) Exprimer, en fonction de m, v et f, le terme $Bavi$ à partir de f_L dans (EM).

.....

c) Égaliser les expressions obtenues en a) et b) pour exprimer la puissance fournie par l'opérateur fv en fonction de E_c et $\mathcal{P}_J$.

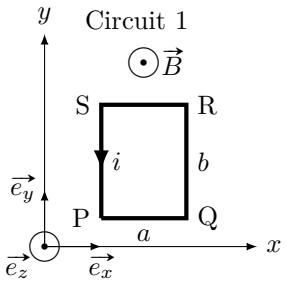
On rappelle que $\left(f^2(x)\right)' = 2f'(x)f(x)$.

.....

Force de Laplace

Entraînement 1.11 — Force de Laplace sur une spire rectangulaire.

On considère un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme ainsi qu'un circuit rectangulaire (appelé « circuit 1 »), parcouru par un courant i.



Quelle est l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur chaque portion du circuit 1 en fonction de B, a, i et des vecteurs unitaires du repère ?

a) PQ .....

c) RS .....

b) QR .....

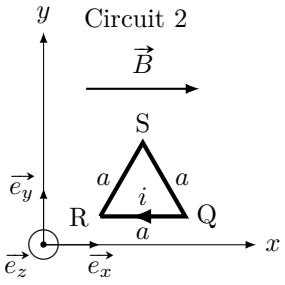
d) SP .....

e) Quelle est la résultante des forces de Laplace exercées sur le circuit 1 ? ....

Entraînement 1.12 — Force de Laplace sur une spire triangulaire.

On considère un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et un circuit triangulaire (appelé « circuit 2 »), parcouru par un courant i.

Quelle est l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur chaque portion du circuit 2 en fonction de B, a, i et des vecteurs unitaires du repère ?



a) QR. ...

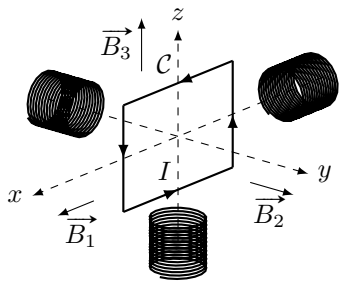
b) RS ....

c) SQ ....

Entraînement 1.13 — Couple des forces de Laplace sur une spire.

Un circuit mobile $\mathcal{C}$ de surface S dans lequel circule un courant d'intensité I est soumis à différents champs magnétiques uniformes et constants produits par trois bobines tels que :

$\overrightarrow{B_1} = B\overrightarrow{e_x}$; $\overrightarrow{B_2} = B\overrightarrow{e_y}$; $\overrightarrow{B_3} = B\overrightarrow{e_z}$.



On rappelle que le moment magnétique d'une spire $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est défini par $\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\overrightarrow{S}$ avec $\overrightarrow{S}$ son vecteur surface.

a) Exprimer le vecteur surface $\overrightarrow{S}$ en fonction de S et de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ .....

Exprimer le couple des forces de Laplace $\overrightarrow{\Gamma}_L = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B}$ que subit la spire $\mathcal{C}$ en fonction de S, I et B pour :

b) $\overrightarrow{B_1}$ ...

c) $\overrightarrow{B_2}$ ...

d) $\overrightarrow{B_3}$ ...

Les couples des forces de Laplace mettent la spire en rotation. Parmi les champs produits par les bobines, déterminer à l'aide de la règle de la main droite celui qui provoque les rotations du circuit $\mathcal{C}$ données ci-dessous.

e) La rotation de la spire autour de l'axe (Ox) dans le sens direct.

(a) $\overrightarrow{B_1}$ (b) $\overrightarrow{B_2}$ (c) $\overrightarrow{B_3}$ (d) aucun

.....

f) La rotation de la spire autour de l'axe (Oy) dans le sens direct ?

(a) $\overrightarrow{B_1}$ (b) $\overrightarrow{B_2}$ (c) $\overrightarrow{B_3}$ (d) aucun

.....

g) La rotation de la spire autour de l'axe (Oz) dans le sens direct ?

(a) $\overrightarrow{B_1}$ (b) $\overrightarrow{B_2}$ (c) $\overrightarrow{B_3}$ (d) aucun

.....

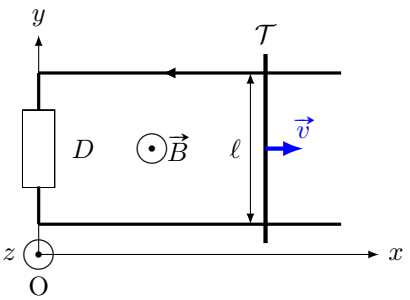
Autour du rail de Laplace

Le rail de Laplace est un circuit constitué de deux rails conducteurs parallèles horizontaux espacés d'une distance $\ell = 10$ cm sur lesquels repose une tige conductrice $\mathcal{T}$ de masse $m = 10$ g.

Celle-ci glisse sans frottement sur les rails tout en leur restant perpendiculaire.

On repère la position x de la tige sur l'axe (Ox). On suppose que les rails conducteurs et la tige ont une résistance nulle.

L'ensemble est soumis à un champ magnétique uniforme permanent $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$, avec $B = 1$ T. À l'instant initial, la tige est lancée à une vitesse $\overrightarrow{v}(t = 0) = v_0\overrightarrow{e_x}$.



Le composant D est un dipôle dont la nature sera indiquée dans les exercices suivants.

Entraînement 1.14 — Rail de Laplace (I).

Dans cet entraînement, le dipôle D est une résistance R. On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -B\ell i & \text{(EM).} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ .....

b) Quelle est l'expression de la vitesse $v(t)$?

(a) $v_0 \exp\left(-\dfrac{mR}{B^2\ell^2}t\right)$ (c) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$

(b) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B\ell}{mR}t\right)$ (d) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{R}t\right)$

.....

Entraînement 1.15 — Rail de Laplace (II).

Dans cet entraînement, le dipôle D est un générateur de tension non idéal (constitué d'un générateur de tension idéal de force électromotrice E en série avec sa résistance interne r). On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v(t) + E = ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -B\ell i & \text{(EM).} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ .....

b) Quelle est l'expression de la vitesse limite v_{lim} atteinte par la tige ? .....

Entraînement 1.16 — Rail de Laplace (III).

Dans cet entraînement, le dipôle D est une bobine d'inductance $L = 0{,}5\,\text{H}$ et de résistance $r = 1\,\Omega$.

On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + ri(t) & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -B\ell i(t) & \text{(EM).} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ .....

b) Quelle est l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$?

(a) $x^2 + \dfrac{r}{L}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL} = 0$

(b) $x^2 + \dfrac{L}{r}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL} = 0$

(c) $x^2 + \dfrac{L}{r}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}x = 0$

.....

c) Comment peut-on qualifier le discriminant associé à l'équation caractéristique ?

(a) Il est strictement positif.

(b) Il est nul.

(c) Il est strictement négatif.

.....

d) Quelle est l'expression de $i(t)$?

Les nombres α et β sont réels.

(a) $\alpha \mathrm{e}^{\left(-\frac{r}{2L}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2}{L^2}-4\frac{B^2\ell^2}{mL}}\right)t} + \beta \mathrm{e}^{\left(-\frac{r}{2L}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2}{L^2}-4\frac{B^2\ell^2}{mL}}\right)t}$

(b) $\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{r^2}{L^2}-4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}}t\right)+\beta\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{r^2}{L^2}-4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}}t\right)\right)$

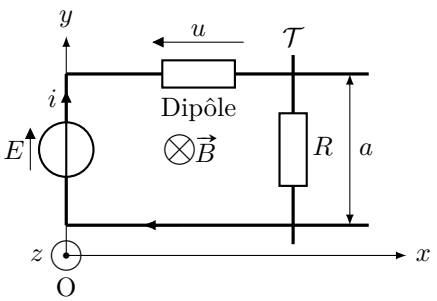
(c) $(\alpha+\beta t)\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}$

(d) $\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}-\dfrac{r^2}{L^2}}t\right)+\beta\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}-\dfrac{r^2}{L^2}}t\right)\right)$

.....

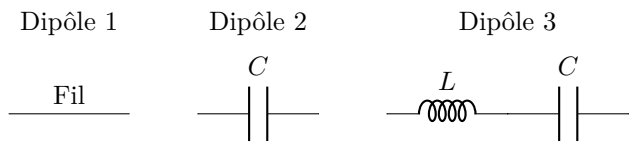
Entraînement 1.17 — Équations différentielles.

On considère un circuit constitué d'un générateur de force électromotrice constante E, d'un dipôle et d'une tige mobile $\mathcal{T}$ de résistance R repérée par la coordonnée x sur l'axe $(\mathrm{O}x)$, plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$. On oriente le circuit dans le sens horaire.



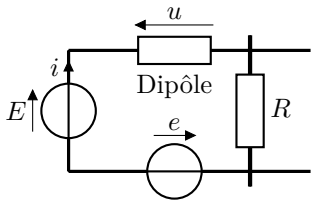
On admet que le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige $\mathcal{T}$ selon l'axe $(\mathrm{O}x)$ permet d'écrire la relation $m\ddot{x} = iaB$. De plus, la force électromotrice induite est $e = -Ba\dot{x}$.

On étudie les cas où le dipôle correspond à ces trois montages suivants.

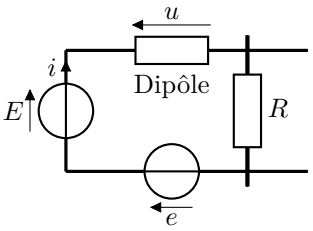


a) Quel sera le montage complet en tenant compte de la force électromotrice induite e ?

(a)



(b)



.....

b) Exprimer la tension u à partir de la loi des mailles en fonction de E, i, R, B, a et $\dot{x}$.

.....

c) Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ en fonction de B, a, m, R, i et de $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ .....

d) Donner l'équation différentielle vérifiée par i pour le dipôle 1.

.....

e) Donner l'équation différentielle vérifiée par i pour le dipôle 2.

.....

f) Donner l'équation différentielle vérifiée par i pour le dipôle 3.

.....

Autres entraînements

Entraînement 1.18 — Vitesse limite.

L'expression de la vitesse $v(t)$ d'une tige sur des rails de Laplace a pour expression

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{Ba}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

a) Comment s'écrit la dimension du coefficient τ ?

On note T *la dimension d'un temps et* M *la dimension d'une masse.*

(a) 1
(b) T
(c) T^{-1}
(d) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}$

.....

b) En supposant que, à $t = 0$, $x(t = 0) = x_0$, déterminer $x(t)$.

.....

Entraînement 1.19 — Un système couplé.

Après écriture de la loi des mailles et de la relation fondamentale de la dynamique, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + aBv = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - iBa = mg. \end{cases}$$

a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$?

(a) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{aBv}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \dfrac{a^2B^2v}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

.....

b) Quelle est la dimension du coefficient $\dfrac{Rg}{L}$?

On note T *la dimension d'un temps et* M *la dimension d'une masse.*

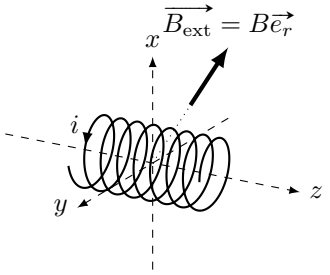
(a) 1 (c) $\mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{T}^3$

(b) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-3}$ (d) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$

.....

Entraînement 1.20 — Force de Laplace.

Soit une bobine de N spires de rayon R d'axe $(\mathrm{O}z)$ et soumise à un champ magnétique extérieur radial $\overrightarrow{B_{\text{ext}}} = B\vec{e_r}$ dans le système de coordonnées cylindriques.



a) Donner l'expression d'un élément de longueur $\mathrm{d}\ell$ de la bobine.

(a) $\mathrm{d}r$ (b) $\mathrm{d}z$ (c) $\mathrm{d}x$ (d) $R\,\mathrm{d}\theta$

.....

b) Déterminer l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur la bobine.

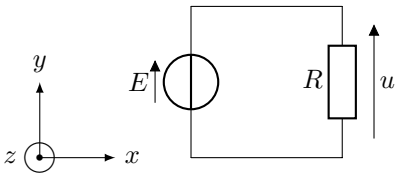
.....

Entraînement 1.21 — Choix du sens du courant induit.

Soit un circuit électrique de surface $S = 500\,\mathrm{cm}^2$, composé d'un générateur idéal délivrant une tension $E = 200\,\mathrm{mV}$ et un résistor de résistance $R = 5\,\mathrm{k\Omega}$.

Il est plongé dans un champ magnétique tel que $\vec{B} = B\dfrac{t}{\tau}\vec{e_z}$ avec $B = 2\,\mathrm{T}$.

On prendra $\tau = 1\,\text{s}$.



On choisit d'orienter le courant induit i_{ind} dans le sens horaire.

a) Dans quel sens est orientée la flèche de tension de la fém e induite par rapport à E ?

(a) dans le même sens (b) dans le sens opposé

.....

b) À partir de la règle de la main droite, exprimer le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ en fonction de S et des vecteur de la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

.....

c) Exprimer le flux magnétique ϕ traversant le circuit en fonction de B, t, τ et S.

.....

d) Exprimer la fém e apparaissant dans le circuit en fonction de B, τ et S .....

e) Quelle est la valeur de la tension u aux bornes du résistor ? .....

On choisit d'orienter le courant induit i_{ind} dans le sens anti-horaire.

f) Dans quel sens est orientée la flèche de tension de la fém e induite par rapport à E ?

(a) dans le même sens (b) dans le sens opposé

.....

g) À partir de la règle de la main droite, exprimer le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ en fonction de S et des vecteur de la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

.....

h) Exprimer le flux magnétique ϕ traversant le circuit en fonction de B, t, τ et S.

.....

i) Exprimer la fém e apparaissant dans le circuit en fonction de B, τ et S .....

j) Calculer la valeur de la tension u aux bornes du résistor .....

Entraînement 1.22 — Un bilan de puissance.

On considère le système d'équations électrique (EE) et mécanique (EM) suivant, avec la force électromotrice induite $e = -Bav$, la force de Laplace de valeur $f_{\text{L}} = Bai$, la force de rappel d'un ressort de valeur $-kx$

et une force de frottement fluide de valeur $-\alpha v$:

$$\begin{cases} E + e = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f_{\mathrm{L}} - kx - \alpha v & \text{(EM).} \end{cases}$$

On rappelle que l'énergie cinétique de la barre est $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ *; que la puissance dissipée par effet Joule est* $\mathcal{P}_J = Ri^2$ *; que l'énergie potentielle de la barre est* $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$ *; enfin, que la puissance dissipée par frottements est* $\mathcal{P}_f = \alpha v^2$.

a) Exprimer, en fonction de E, R et i, le terme $Bavi$ à partir de e dans (EE).

.....

b) Exprimer, en fonction de m, v, k, x et α le terme $Bavi$ à partir de f_{L} dans (EM).

.....

c) Égaliser les expressions obtenues en a) et b) pour exprimer la puissance fournie Ei en fonction des grandeurs E_{c}, $\mathcal{P}_{\mathrm{J}}$, E_{p} et $\mathcal{P}_{\mathrm{f}}$.

On rappelle que $v = \dot{x}$.

.....

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Induction (partie 2)

Réponses

1.1 a) $\boxed{\vec{e_z}}$

1.1 b) $\boxed{-\vec{e_z}}$

1.1 c) $\boxed{\vec{e_y}}$

1.1 d) $\boxed{\vec{e_y}}$

1.1 e) $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})}$

1.1 f) $\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})}$

1.2 a) $\boxed{\text{d}}$

1.2 b) $\boxed{\text{aucune}}$

1.2 c) $\boxed{\text{b}}$

1.2 d) $\boxed{\text{a}}$

1.3 a) $\boxed{\text{oui}}$

1.3 b) $\boxed{\text{oui}}$

1.3 c) $\boxed{\text{non}}$

1.3 d) $\boxed{\text{non}}$

1.3 e) $\boxed{\text{oui}}$

1.3 f) $\boxed{\text{non}}$

1.4 a) $\boxed{0}$

1.4 b) $\boxed{-Bx_\text{c}\ell}$

1.4 c) $\boxed{-B\ell^2}$

1.4 d) $\boxed{-B(a-(x_\text{c}-\ell))\ell}$

1.4 e) $\boxed{0}$

1.4 f) $\boxed{-Bv\ell}$

1.4 g) $\boxed{0}$

1.4 h) $\boxed{Bv\ell}$

1.5 a) $\boxed{\pi R^2 B_\text{m}\cos(\omega t)}$

1.5 b) $\boxed{\pi a^2 B_\text{m}\cos(\omega t)}$

1.5 c) $\boxed{\text{d}S = r\,\text{d}\theta\,\text{d}r}$

1.5 d) $\boxed{2\pi B_0\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^3}{3a}\right)}$

1.5 e) $\boxed{2\pi B_0\frac{a^2}{6}}$

1.6 a) $\boxed{B\pi R^2\cos(\omega t)}$

1.6 b) $\boxed{0}$

1.6 c) $\boxed{-\frac{B\pi R^2}{2}}$

1.6 d) $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}B\pi R^2}$

1.6 e) $\boxed{B\pi R^2}$

1.7 a) $\boxed{\text{a}}$

1.7 b) $\boxed{\text{a}}$

1.7 c) $\boxed{\frac{\mu_0 N I a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$

1.7 d) $\boxed{\frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$

1.8 a) $\boxed{\text{c}}$

1.8 b) $\boxed{\text{a}}$

1.9 a) $\boxed{\text{c}}$

1.9 b) $\boxed{\frac{-\alpha B\underline{I}}{h+\text{j}(m\omega-\frac{k}{\omega})}}$

1.9 c) $\boxed{\text{c}}$

1.10 a) $\boxed{-Ri^2}$

1.10 b) $\boxed{mv\frac{\text{d}v}{\text{d}t}-fv}$

1.10 c) $\boxed{\frac{\text{d}E_\text{c}}{\text{d}t}+\mathcal{P}_\text{J}}$

1.11 a) ..... $\boxed{-iaB\overrightarrow{e_y}}$

1.11 b) ..... $\boxed{ibB\overrightarrow{e_x}}$

1.11 c) ..... $\boxed{iaB\overrightarrow{e_y}}$

1.11 d) ..... $\boxed{-ibB\overrightarrow{e_x}}$

1.11 e) ..... $\boxed{\overrightarrow{0}}$

1.12 a) ..... $\boxed{\overrightarrow{0}}$

1.12 b) ..... $\boxed{-i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\overrightarrow{e_z}}$

1.12 c) ..... $\boxed{i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\overrightarrow{e_x}}$

1.13 a) ..... $\boxed{S\overrightarrow{e_y}}$

1.13 b) ..... $\boxed{-IBS\overrightarrow{e_z}}$

1.13 c) ..... $\boxed{\overrightarrow{0}}$

1.13 d) ..... $\boxed{IBS\overrightarrow{e_x}}$

1.13 e) ..... $\boxed{\text{c}}$

1.13 f) ..... $\boxed{\text{d}}$

1.13 g) ..... $\boxed{\text{d}}$

1.14 a) ..... $\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{B^2\ell^2}{mR}v=0}$

1.14 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

1.15 a) ..... $\boxed{\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{B^2\ell^2}{mr}v(t)=-\frac{B\ell E}{mr}}$

1.15 b) ..... $\boxed{-\frac{E}{B\ell}}$

1.16 a) ..... $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{r}{L}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{B^2\ell^2}{mL}i(t)=0}$

1.16 b) ..... $\boxed{\text{a}}$

1.16 c) ..... $\boxed{\text{c}}$

1.16 d) ..... $\boxed{\text{d}}$

1.17 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

1.17 b) ..... $\boxed{E-Ba\dot{x}-Ri}$

1.17 c) ..... $\boxed{-\frac{(Ba)^2}{m}i-R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$

1.17 d) ..... $\boxed{R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{(Ba)^2}{m}i=0}$

1.17 e) ..... $\boxed{R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{(Ba)^2}{m}+\frac{1}{C}\right)i=0}$

1.17 f) ..... $\boxed{L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{(Ba)^2}{m}+\frac{1}{C}\right)i=0}$

1.18 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

1.18 b) ..... $\boxed{x_0+\frac{e}{Ba}\left(t+\tau\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}-\tau\right)}$

1.19 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

1.19 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

1.20 a) ..... $\boxed{\text{d}}$

1.20 b) ..... $\boxed{-iB2\pi RN\overrightarrow{e_z}}$

1.21 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

1.21 b) ..... $\boxed{-S\overrightarrow{e_z}}$

1.21 c) ..... $\boxed{-B\frac{t}{\tau}S}$

1.21 d) ..... $\boxed{\frac{BS}{\tau}}$

1.21 e) ..... $\boxed{300\,\text{mV}}$

1.21 f) ..... $\boxed{\text{b}}$

1.21 g) ..... $\boxed{S\overrightarrow{e_z}}$

1.21 h) ..... $\boxed{\frac{BSt}{\tau}}$

1.21 i) ..... $\boxed{-\frac{BS}{\tau}}$

1.21 j) ..... $\boxed{300\,\text{mV}}$

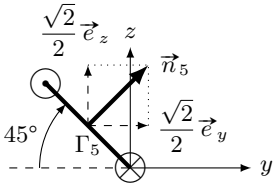
1.22 a) ..... $\boxed{Ei-Ri^2}$

1.22 b) ..... $\boxed{mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kxv+\alpha v^2}$

1.22 c) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{f} + \mathcal{P}_\mathrm{J}}$

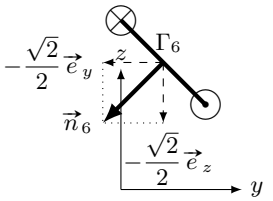
Corrigés

1.1 e)



.....

1.1 f)



.....

1.3 a) Il y a trois façons de modifier un flux : modifier la surface, modifier le champ, changer l'angle entre le vecteur normal à la surface et le champ. Ici, comme $\vec{B} \wedge \vec{n} = \vec{0}$ à $t = 0$, les deux vecteurs sont colinéaires. Comme le cadre tourne autour d'un de ses côtés, l'angle entre $\vec{n}$ et $\vec{B}$ varie au cours du temps.

.....

1.3 b) La surface où le champ est non nul augmente au cours du temps tant que le cadre n'est pas entièrement dans la zone où règne le champ.

.....

1.3 c) Le produit scalaire entre $\vec{B}(t)$ et $\vec{n}$ est nul.

.....

1.3 d) Ni la surface ni l'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{n}$ ne varie.

.....

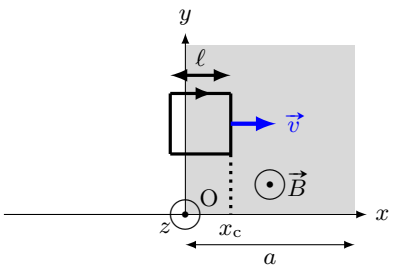
1.3 e) La surface varie.

.....

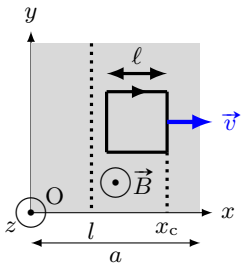
1.3 f) Il ne faut pas confondre les termes « uniforme » (ne varie pas dans l'espace) et « constant » (ne varie pas dans le temps).

.....

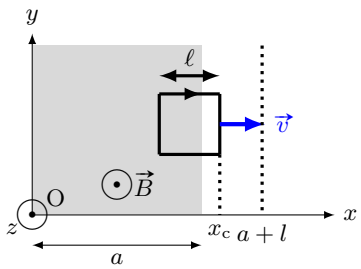
1.4 b)



1.4 c)



1.4 d)



1.5 a) On a $\Phi = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_m \cos(\omega t) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_m \cos(\omega t) \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta.$

1.5 b) On a $\Phi = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_m \cos(\omega t) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_m \cos(\omega t) \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta.$

1.5 d) On a $\Phi' = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_0\left(1-\frac{r}{a}\right) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_0 \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(r - \frac{r^2}{a}\right) \mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = 2\pi B_0 \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3a}\right].$

1.5 e) On a $\Phi' = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_0\left(1-\frac{r}{a}\right) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_0 \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(r - \frac{r^2}{a}\right) \mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = 2\pi B_0 \frac{a^2}{6}.$

1.6 a) L'angle entre la normale à la spire et le champ magnétique $\vec{B}$ étant ωt, le calcul du flux s'écrit :

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\;\mathrm{d}S = \iint_S B\cos(\omega t)\,\mathrm{d}S = B\cos(\omega t)\iint_S \mathrm{d}S = B\pi R^2\cos(\omega t).$$

1.7 d) Le flux propre à travers les N spires sera $\dfrac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi}\ln\left(\dfrac{d+a}{d}\right) = LI$.

1.8 b) Chaque terme de l'équation doit avoir même dimension. Or $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ a pour dimension $\dfrac{\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{T}}$, donc $\dfrac{a^2B^2v}{Rm}$ a pour dimension $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$. On déduit la dimension de $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$ en divisant $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$ par la dimension de la vitesse $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}$. Donc $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$ a pour dimension T^{-1}.

1.10 a) On a $e\times i = Ri\times i$ donc $-Bav\times i = Ri^2$ donc $Bavi = -Ri^2$.

1.10 b) On a $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\times v = f\times v + f_\mathrm{L}\times v$ donc $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f\times v + Bai\times v$ donc $Bavi = mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv$.

1.10 c) D'après les questions précédentes, on peut égaliser les deux expressions de $Bavi$; on a donc :

$$-Ri^2 = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv \qquad \text{donc} \qquad fv = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Ri^2 = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \mathcal{P}_\mathrm{J} = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}.$$

1.11 e) Dans le cas d'un champ uniforme (égal à la même valeur en tout point de l'espace), la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur un circuit fermé est nulle.

1.12 a) Le champ magnétique $\vec{B}$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ sont tous deux portés par $\vec{e_x}$. Le produit vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{QR}}\wedge\vec{B}$ étant nul, on a $\overrightarrow{F_\mathrm{L}} = \vec{0}$.

1.12 b) Le courant étant uniforme, la force de Laplace s'écrit : $\overrightarrow{F_\mathrm{L}} = i\overrightarrow{\mathrm{RS}}\wedge\vec{B}$. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = a\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_y} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_z}\right) = \frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right) \qquad \text{donc} \qquad \overrightarrow{F_\mathrm{L}} = i\frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right)\wedge\left(B\vec{e_y}\right) = -i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_z}.$$

1.12 c) Le courant étant uniforme, la force de Laplace s'écrit : $\overrightarrow{F_\mathrm{L}} = i\overrightarrow{\mathrm{SQ}}\wedge\vec{B}$. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{SQ}} = a\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_y} - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_z}\right) = \frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right) \qquad \text{donc} \qquad \overrightarrow{F_\mathrm{L}} = i\frac{a}{2}\left(\vec{e_y} - \sqrt{3}\vec{e_z}\right)\wedge\left(B\vec{e_y}\right) = i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_x}.$$

1.13 a) D'après la règle de la main droite, le sens de circulation du courant d'intensité I impose que $\vec{S} = S\vec{e_y}$.

1.13 b) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_x} = -IBS\vec{e_z}$.

1.13 c) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_y} = \vec{0}$.

1.13 d) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_z} = IBS\vec{e_x}$.

1.13 e) Le couple des forces de Laplace produit par $\overrightarrow{B_3}$ est orienté selon les $x > 0$, d'après la règle de la main droite, la spire va donc tourner autour de l'axe (Ox) dans le sens direct.

.....

1.13 f) Aucun couple calculé plus tôt n'est orienté selon $\vec{e_y}$, il n'y a donc pas de champ magnétique qui provoque une rotation de la spire autour de l'axe (Oy).

.....

1.13 g) Le couple des forces de Laplace produit par $\overrightarrow{B_1}$ est orienté selon les $z < 0$, d'après la règle de la main droite, la spire va donc tourner autour de l'axe (Oz) dans le sens indirect. Il n'y a donc pas de champ magnétique qui provoque une rotation de la spire autour de l'axe (Oz) dans le sens direct.

.....

1.14 a) L'équation électrique permet d'établir que $i(t) = \dfrac{B\ell v}{R}$. En injectant cette relation dans l'équation mécanique, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2\ell^2}{mR}v = 0.$$

.....

1.14 b) La résolution de l'équation différentielle sur v donne $v(t) = A\exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$. À l'instant $t = 0$, on a $v(t=0) = v_0$, donc $A\exp(0) = v_0$ et donc $A = v_0$. Ainsi, on a $v(t) = v_0\exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$.

.....

1.15 a) On isole $i(t)$ dans l'équation électrique pour obtenir $i = \dfrac{B\ell v(t)}{r} + \dfrac{E}{r}$. En injectant ce résultat dans l'équation mécanique, on obtient :

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2\ell^2}{r}v(t) - \frac{B\ell E}{r} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2\ell^2}{mr}v(t) = -\frac{B\ell E}{mr}.$$

.....

1.15 b) La vitesse limite $v_{\lim}$ correspond à la vitesse atteinte en régime permanent, soit quand $\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 0$.

On a donc $\dfrac{B^2\ell^2}{r}v_{\lim} = -\dfrac{B\ell E}{r}$. On en déduit $v_{\lim} = -\dfrac{E}{B\ell}$.

.....

1.16 a) À partir de l'équation électrique, on a $v = \dfrac{1}{B\ell}\left(L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + ri(t)\right)$, qu'on injecte dans l'équation mécanique.

On obtient $\dfrac{m}{B\ell}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri\right) = -B\ell i$, et ainsi $\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{r}{L}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}i = 0$.

.....

1.16 c) On calcule son discriminant $\Delta = \dfrac{r^2}{L^2} - 4\dfrac{B^2\ell^2}{mL} = \dfrac{1}{0{,}25} - 4\times\dfrac{1\times10^{-2}}{0{,}01\times0{,}5} = 4 - 4\times2 = -4$.

.....

1.16 d) Le discriminant étant négatif, les racines complexes sont :

$$\rho_{1/2} = -\frac{r}{2L} \pm \mathrm{j}\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{B^2\ell^2}{mL} - \frac{r^2}{L^2}} = -\frac{r}{2L} \pm \mathrm{j}\omega,$$

avec $\omega = \dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL} - \dfrac{r^2}{L^2}}$. On obtient $i(t) = \mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t))$.

.....

1.17 a) Avec la règle de la main droite, en utilisant l'orientation du contour, on oriente la surface pour le calcul du flux (suivant $-\vec{e_z}$). La source de tension induite de fém e a une polarité (sa flèche tension) dans le même sens que l'orientation du contour.

.....

1.17 b) D'après la loi des mailles, on a $E + e = u + Ri$, donc $E - Ba\dot{x} = u + Ri$, et donc $u = E - Ba\dot{x} - Ri$.

.....

1.17 c) D'après la question précédente, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E - Ba\dot{x} - Ri) = -Ba\ddot{x} - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Comme $\ddot{x} = \dfrac{Ba}{m}i$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

.....

1.17 d) Le dipôle 1 est un fil, sa tension u est donc nulle, ainsi $-\dfrac{(Ba)^2}{m}i - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, ou $R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(Ba)^2}{m}i = 0$.

.....

1.17 e) Le dipôle 2 est un condensateur traversé par un courant d'intensité $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i}{C}$. D'où :

$$\frac{i}{C} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et donc} \qquad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{(Ba)^2}{m} + \frac{1}{C}\right)i = 0.$$

.....

1.17 f) Le dipôle 4 est une association série d'une bobine et d'un condensateur. La tension à ses bornes est donc $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C$, avec u_C la tension aux bornes du condensateur. Donc $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{i}{C}$. D'où :

$$L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i}{C} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et donc} \qquad L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{(Ba)^2}{m} + \frac{1}{C}\right)i = 0.$$

.....

1.18 a) L'argument $-\dfrac{t}{\tau}$ de l'exponentielle doit être sans dimension. Donc τ a la même dimension que t, soit T.

.....

1.19 b) Chaque terme de l'équation doit avoir même dimension.

On pouvait aussi exploiter le fait que $\left[\dfrac{R}{L}\right] = \mathrm{T}^{-1}$ *et* $[g] = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$.

.....

1.20 b) On a $\overrightarrow{F_\mathrm{L}} = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi N} iR\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} \wedge (B\overrightarrow{e_r}) = -iRB\int_{\theta=0}^{2\pi N} d\theta\overrightarrow{e_z} = -iB2\pi RN\overrightarrow{e_z}$.

.....

1.21 a) La flèche de tension de la fém e induite est orientée dans le même sens que le courant induit i_ind, soit horaire, donc elle est orientée dans le même sens que E.

.....

1.21 b) D'après la règle de la main droite, le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ est orienté selon $-\overrightarrow{e_z}$; comme S est positif, il vient que $\vec{S} = -S\overrightarrow{e_z}$.

.....

1.21 c) Le flux magnétique traversant le circuit est tel que $\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\dfrac{t}{\tau}\overrightarrow{e_z}\cdot(-S\overrightarrow{e_z}) = -B\dfrac{t}{\tau}S$.

.....

1.21 d) La fém apparaissant dans le circuit est telle que $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}(-BtS)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{BS}{\tau}$.

.....

1.21 e) D'après la loi des mailles, $u = E + e = E + \dfrac{BS}{\tau}$. D'où :

$$u = 2{,}00\times10^{-3}\,\mathrm{V} + \frac{2\,\mathrm{T}}{1\,\mathrm{s}}\times500\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = 300\,\mathrm{mV}.$$

.....

1.21 f) La flèche de tension de la fém e induite est orientée dans le même sens que le courant induit i_{ind}, soit anti-horaire, donc elle est orientée dans le sens opposé à E.

.....

1.21 g) D'après la règle de la main droite, le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ est orienté selon $\vec{e_z}$; comme S est positif, il vient que $\vec{S} = S\vec{e_z}$.

.....

1.21 h) Le flux magnétique traversant le circuit est tel que $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\dfrac{t}{\tau}\vec{e_z} \cdot S\vec{e_z} = \dfrac{BSt}{\tau}$.

.....

1.21 i) La fém apparaissant dans le circuit est telle que $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}(BtS)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{BS}{\tau}$.

.....

1.21 j) D'après la loi des mailles, $u = E - e = E + \dfrac{BS}{\tau}$. D'où :

$$u = 2{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{V} + \frac{2\,\mathrm{T}}{1\,\mathrm{s}} \times 500 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = 300\,\mathrm{mV}.$$

.....

1.22 a) On a $E \times i + e \times i = Ri \times i$ donc $Ei - Bav \times i = Ri^2$ et donc $Bavi = Ei - Ri^2$.

.....

1.22 b) On a $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \times v = f_{\mathrm{L}} \times v - kx \times v - \alpha v \times v$ donc $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Bai \times v - kxv - \alpha v^2$. Finalement, on a :

$$Bavi = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2.$$

.....

1.22 c) D'après les questions précédentes, on peut égaliser les deux expressions de $Bavi$.

On a donc $Ei - Ri^2 = mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2$ et donc :

$$Ei = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2 + Ri^2 = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}k\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}}.$$

.....