Devoir Maison n°7
pour Lundi 2 novembre, 8h

La présentation et la rédaction devront être soignées.
Les exercices ou questions avec ★ sont facultatifs.

Exercice 1.

Montrer que les expressions suivantes sont égales à 0.
$A = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$
$B = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{10}\right)$
$C = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.

Exercice 2.

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs quelconques, et $\vec{u} = (\vec{i}.\vec{k})\vec{j} - (\vec{i}.\vec{j})\vec{k}$.
Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{i}$ sont orthogonaux.

Exercice 3.

On note $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + 3y - z = 4\right\}$ et $B = \left\{(-t + 3, t + 1, t + 5),\, t \in \mathbb{R}\right\}$.

1. Montrer que $B \subset A$.

★ **2.** Est-ce que $A \subset B$?

Exercice 4.

Pour (au moins) deux des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité.
Pour chacune, calculer la dérivée.

1. $f : x \mapsto \dfrac{\cos(2x - 1)}{e^{3x+4} + 5}$

2. $f : x \mapsto x^5 - 4x^2 + 2x - \dfrac{5}{x^4}$

3. $f : x \mapsto \sqrt{3x + 5}$

4. $f : x \mapsto \left(\dfrac{3x + 4}{2x^2 + 5x - 12}\right)^3$

Exercice 5.

Déterminer l'ensemble de définition et dérivabilité des fonctions suivantes, puis étudier leurs variations.

1. $f(x) = x^3 - 3\ln(x)$

2. $f(x) = x - 1 + e^{-x+1}$

3. $f(x) = \dfrac{4x - 5}{2x - 1}$

Exercice 6.

Un graphique correctement annoté peut servir de justification.

1. On note f la fonction valeur absolue, déterminer $f([\![-2, 1]\!])$, $f^{-1}([\![-2, 1]\!])$ puis $f^{-1}(f([\![-2, 1]\!])$ et $f(f^{-1}([\![-2, 1]\!])$.

2. On note g la fonction sinus.
Déterminer $g(\mathbb{R})$, $g([0, \pi[)$, $g^{-1}([-1, 1[)$ et $g^{-1}([3, 4])$.

3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n + 3 \end{array}$
Déterminer $h([\![10, 14]\!])$ et $h^{-1}([\![0, 5]\!])$.

Exercice 7.

On appelle E l'ensemble des élèves de la classe de TSI2.1, et n est l'application de E dans $[\![0;20]\!]$ qui à un élève associe sa note au dernier DS de maths.

1. Donner l'écriture symbolique des propositions suivantes.
Par exemple, pour la phrase « Au moins un élève a 10 ou moins que 10. », cela peut donner $\exists e \in E, n(e) \leqslant 10$.

(a) Au moins un élève a 10 ou plus de 10.
(b) Tous les élèves ont 10 ou plus.
(c) Aucun élève n'a dépassé 10.
(d) Yannick a eu la meilleure note.
(e) Aucun élève n'a eu la même note que Arno.
(f) Un seul élève a eu 17.

2. Donner la négation de chacune des propositions précédentes, en français, et en écriture symbolique. (écriture symbolique facultative pour la négation de la **(f)**).

3. Parmi toutes les propositions précédentes, en trouver deux qui ont un lien d'implication (*préciser le sens de l'implication*).

Exercice 8.

Résoudre :

(a) $-x^2 + 2x - 1 > 1$
(b) $-2x^3 - 9x^2 - 3x + 4 > 0$
(c) $1 + x \geqslant \dfrac{1}{x}$
(d) $|3x + 2| = 3$
(e) $|-4x + 1| \leqslant 3$
(f) $|3x + 4| < 5$
(g) $|-2x + 3| > 1$
(h) $|2x + 3| \geqslant 2$
(i) $|2x^2 - 2x - 2| \leqslant 2$.

Calculs

Traiter (au moins) un exercice au choix.

Exercice 9. Fractions.

Exprimer les termes suivants sous forme d'une seule fraction, simplifier au maximum.

(a) $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{6}$
(b) $\dfrac{\frac{1}{4} + 5}{\frac{2}{3}}$
(c) $\dfrac{-\frac{3}{2} + \frac{9}{4}}{2}$
(d) $\dfrac{2}{21} - \dfrac{3}{7} + \dfrac{16}{9}$
(e) $\dfrac{2 - 3 \times \frac{5}{7}}{\frac{20}{21}}$
(f) $27\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2}\right)$
(g) $3 + 5\dfrac{\frac{7}{2} - 2}{\frac{7}{4} - \frac{1}{2}}$
(h) $\dfrac{\left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)\left(2 + \frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{4} - 3}$

Exercice 10. Racines carrées et développements.

Simplifier autant que possible les expressions suivantes.

(a) $(2\sqrt{5})^2$
(b) $(2 + \sqrt{5})^2$
(c) $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4$
(d) $\left(\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$
(e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$
(f) $(3 + \sqrt{7})^2 + (3 - \sqrt{7})^2$
(g) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2}$
(h) $\sqrt{(1 + \sqrt{7})^2 + (1 - \sqrt{7})^2}$
★ **(i)** $\sqrt{(a + b)^2 - 4ab}$