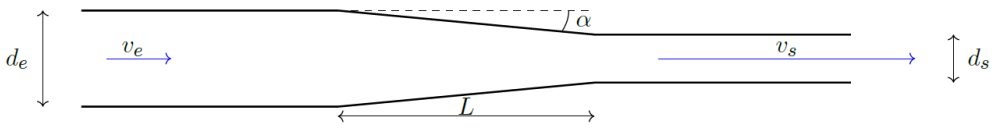
Travaux dirigés du chapitre : 2.2. Description d'un fluide en écoulement stationnaire dans une conduite

Partie : 2. Mécanique des fluides appliquées aux machines thermiques

1 Calculs de débits

1.1 Convergent

On veut accélérer de l'eau dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par un facteur K. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α.



On suppose que sur une section droite de la conduite, la vitesse de l'écoulement est uniforme.

Q1. Représenter l'allure d'un tube de champ pour cet écoulement.

Q2. Donner les expressions des débits volumique en entrée $D_{v,e}$ et en sortie $D_{v,s}$ en fonction des grandeurs d_e, v_e, d_s et v_s.

Q3. Quelle(s) hypothèse(s) doit-on faire pour pouvoir supposer que le débit volumique se conserve ?

Q4. Déterminer dans ce cas la longueur L du convergent nécessaire pour répondre au problème si $K = 2$, $d_e = 20$ mm, $\alpha = 10°$.

1.2 Débit massique

Q1. Déterminer la vitesse d'écoulement d'un gaz dans un tuyau cylindrique si 510 g de ce gaz s'écoule par demi-heure à travers une section du tuyau de diamètre $D = 2$ cm.

Le tuyau s'élargit pour atteindre un diamètre $D' = 5$ cm.

Q2. Quelle est la vitesse du gaz dans la section élargie en supposant l'écoulement incompressible ?

Q3. Pourquoi l'écoulement peut être considéré comme incompressible alors que le gaz est compressible ?

Donnée : masse volumique du gaz $\rho = 7,5$ kg/m^3 dans les conditions de l'expérience.

1.3 Écoulement dans un tuyau poreux

On s'intéresse à un tuyau qui fait jaillir de l'eau de manière radiale (on ne s'intèressera pas à l'écoulement dans le tuyau mais à l'écoulement à l'extérieur du tuyau, une fois que le fluide a traversé la paroi poreuse).

Le système est à symétrie cylindrique, d'axe Oz, axe du tuyau poreux. Le champ de vitesse est décrit par $\vec{v} = v_r(r)\vec{e}_r$. On admet aussi que le fluide est éjecté du tuyau en $r = R$ avec une vitesse v_0 radiale.

Q1. Dessiner la carte des lignes de courant.

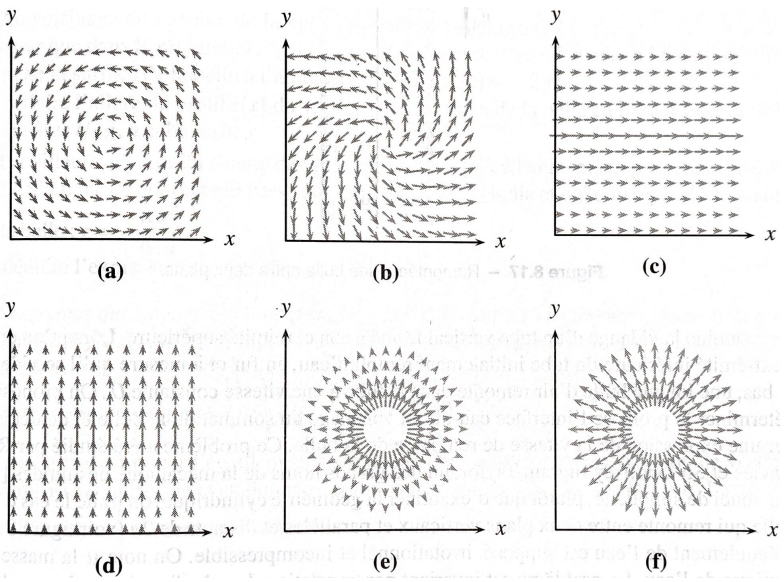
Q2. En supposant le liquide en écoulement incompressible, déterminer l'expression de $v_r(r)$.

Q3. Quel est le débit volumique à travers le cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon R, et celui à travers le cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon $r > R$?

2 Analyse de cartes de champ

Chaque figure ci dessous représente la carte de champ d'un écoulement stationnaire et bidimensionnel.

Q1. Que peut-on dire de l'incompressibilité ?



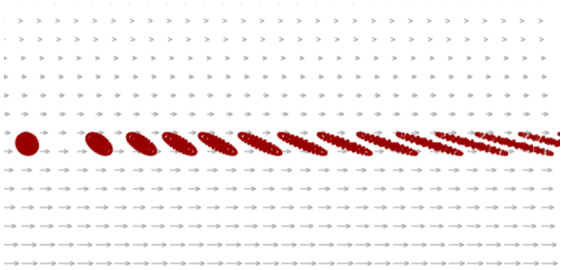
3 Écoulements de Couette

3.1 Écoulement de Couette plan

Un fluide incompressible est disposé entre deux plans horizontaux séparés d'une épaisseur e. Il est mis en mouvement par le déplacement du plan supérieur, situé en $y = e$, à vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$ constante. Le plan inférieur, situé en $y = 0$, est maintenu immobile.

Les deux plans sont de mêmes dimensions L suivant l'axe $\vec{e}_z$ et l suivant $\vec{e}_x$. On néglige les effets de bords, on suppose donc l'écoulement du fluide invariant suivant les axes $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$.

On représente ci-dessous le champ de vitesse eulérien et l'évolution d'une particule de fluide :



On se place en régime permanent : la vitesse du fluide est supposée de la forme $\vec{v} = (Ay+B)\vec{e}_x$. On suppose que au contact d'une paroi le fluide à la même vitesse que la paroi.

Q1. Déterminer le profil de vitesse, donner l'allure des lignes de courant.

Q2. L'écoulement est-il stationnaire ? Puis sur un pavé droit montrer qu'il est incompressible.

Q3. Exprimer le débit massique traversant une surface x =constante.

Q4. Calculer la position $(x(t), y(t), z(t))$ d'une particule fluide lâchée en (x_0, y_0, z_0) à $t = 0$.

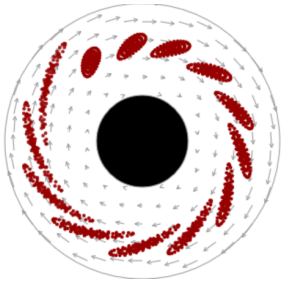
Q5. Calculer l'accélération de cette particule de fluide.

3.2 Écoulement de Couette cylindrique

Un fluide incompressible est disposé entre deux cylindres coaxiaux séparés d'une épaisseur e. Il est mis en mouvement par le déplacement du cylindre extérieur, situé en $r = R + e$, à vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e}_\theta$ constante. Le cylindre inférieur, situé en $r = R$, est maintenu immobile.

Les deux plans sont de mêmes dimensions H suivant l'axe $\vec{e}_z$. On néglige les effets de bords, on suppose donc l'écoulement du fluide invariant suivant l'axe $\vec{e}_z$.

On représente ci-dessous le champ de vitesse eulérien et l'évolution d'une particule de fluide :



On se place en régime permanent : la vitesse du fluide est supposée de la forme $\vec{v} = (Ar+\frac{B}{r})\vec{e}_\theta$. On suppose que au contact d'une paroi le fluide à la même vitesse que la paroi.

Q1. Déterminer le profil de vitesse, donner l'allure des lignes de courant.

Q2. L'écoulement est-il stationnaire ? Puis sur un élément de cylindre montrer qu'il est incompressible.

Q3. Exprimer le débit massique traversant une surface θ =constante.

Q4. Calculer la position $(r(t), \theta(t), z(t))$ d'une particule fluide lâchée en (r_0, θ_0, z_0) à $t = 0$.

Q5. Calculer l'accélération de cette particule de fluide.

4 Caractéristiques d'écoulement dans d'autres géométrie

4.1 Tornade

Le champ de vitesses au sein d'une tornade peut-être modélisé simplement en coordonnées cylindriques par :

$$\vec{v} = \omega r \vec{e}_\theta \text{ si } r \leq a$$
$$\vec{v} = \frac{K}{r}\vec{e}_\theta \text{ si } r \geq a$$

avec ω et K deux constantes.

Q1. Sachant que le champ des vitesses ne présente pas de discontinuité, déterminer K.

Q2. Représenter le champ des vitesses en traçant la fonction $v(r)$ puis en traçant quelques vecteurs vitesse le long d'une droite passant par l'origine. Préciser l'allure des lignes de courant.

Q3. Montrer sur un élément de cylindre que l'écoulement de l'air est incompressible.

4.2 Caractéristiques d'un écoulement hélicoïdal

On considère un écoulement dont le champ de vitesse eulérien est :

$$\vec{v}(M,t) = -\Omega y \vec{e}_x + \Omega x \vec{e}_y + v_0 \vec{e}_z$$

Q1. Cet écoulement est-il stationnaire ? Puis montrer sur un pavé droit qu'il est incompressible.

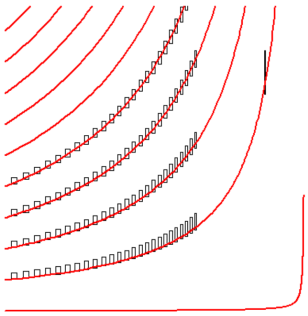
Q2. Calculer la position $(x(t), y(t), z(t))$ d'une particule fluide lâchée en (x_0, y_0, z_0) à $t = 0$.

Q3. Déterminer l'accélération d'une particule de fluide.

4.3 Modélisation d'un écoulement contre une paroi

L'écoulement d'un fluide entre deux solides formant un angle droit a pour champ de vitesses, défini dans la région $x < 0$ et $y > 0$:

$$\vec{v} = -kx\vec{e}_x + ky\vec{e}_y$$



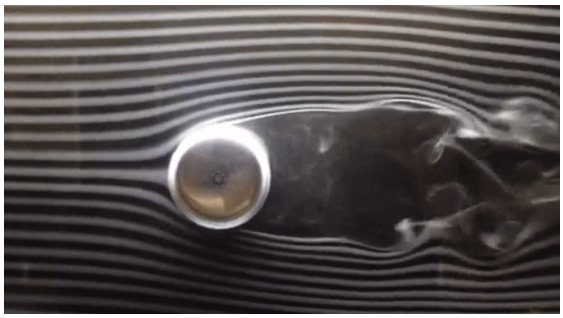
Ci-dessus sont représentées en trait rouge quelques lignes de courant, ainsi que l'évolution des particules de fluides (formes noires).

Q1. Déterminer l'équation des lignes de courant. Les conditions aux limites traduisant :"sur une paroi la vitesse est tangente à la paroi", sont-elles bien vérifiées ?

Q2. Montrer sur un pavé droit que ce champ de vitesses correspond à un écoulement incompressible.

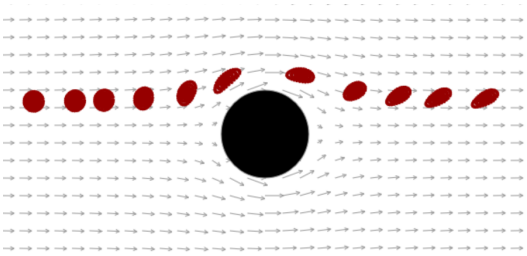
Q3. Déterminer l'accélération d'une particule, commencer par déterminer les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ en formalisme lagrangien.

4.4 Écoulement autour d'un cylindre



Un écoulement permanent, incompressible, uniforme est caractérisé par la vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$, loin d'un cylindre d'axe (Oz) et de rayon a. On suppose que le théorème de superposition peut s'appliquer au champ de vitesse.

Q1. On suppose le cylindre fixe ($\Omega = 0$).



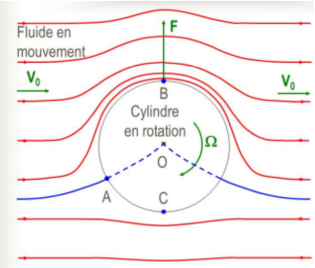
Écoulement autour d'un cylindre fixe

(a) Déterminer les conditions aux limites pour ce champ de vitesse traduisant : "sur une paroi la vitesse est tangente à la paroi".

(b) Trouver l'expression du champ des vitesses autour de ce cylindre en superposant à la vitesse $v_0\vec{e}_x$ loin du cylindre, un champ perturbatif de la forme :

$$\vec{v}_p = \frac{A}{2\pi r^2}\left(\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta\right)$$

Q2. On suppose le cylindre en rotation autour de son axe fixe avec la vitesse angulaire $\Omega \neq 0$.



(a) Trouver l'expression du champ des vitesses autour de ce cylindre en superposant, au précédent champ de vitesse, un champ de type "vortex" :

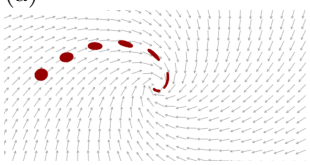
$$\vec{v}_{vortex} = \frac{B\Omega}{r}\vec{e}_\theta$$

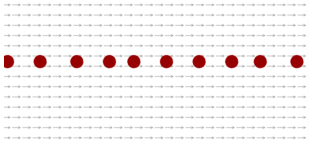
(b) Préciser les points d'arrets (points de vitesse nulle).

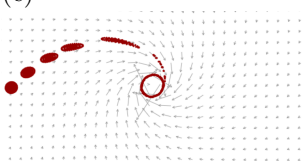
4.5 Écoulements maelström « trou noir de l'océan »

Il existe deux types d'écoulement Maelström le 1 et le 2 caractérisé par $\vec{v}_1 = \frac{1}{r}(-A\vec{e}_r + B\vec{e}_\theta)$ et $\vec{v}_2 = -A\vec{e}_r + B\vec{e}_\theta$

Q1. Associer à chaque carte de champ le type d'écoulement correspondant

(a) 

(b) 

(c) 

Q2. Pour chacun des écoulements (a), (b), et (c), est-il stationnaire ? incompressible ?

Q3. Déterminer l'équation des lignes de courant de (a), (b), et (c).

Q4. Déterminer la position d'une particule de fluide en formalisme lagrangien pour (a), (b), et (c).

4.6 Écoulement imaginaire

Soit un écoulement caractérisé par $\vec{v} = kx\vec{e}_x + ky\vec{e}_y$ avec k une constante positive.

Q1. Rappeler ce que signifie un écoulement stationnaire et un écoulement incompressible.

Q2. Cet écoulement est-il : stationnaire ? incompressible ?

Q3. Déterminer l'accélération d'une particule, commencer par déterminer les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ en formalisme lagrangien.