Programme de la semaine 7
du 9 au 13 novembre.

Calculs : *un de chaque catégorie, au choix de l'examinateur*

On utilise la méthode de la « quantité conjuguée » vue pour les limites, par exemple :

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{2}.$$

1. Écrire sans racine au dénominateur : $A=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; $B=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$; $C=\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+5}$.

2. Calculer (enlever d'abord les racines au dénominateur de chaque fraction) :
$D=\frac{5+\sqrt{15}}{\sqrt{5}+2}-\frac{5+\sqrt{15}}{\sqrt{3}+2}$; $E=\frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}-\frac{1-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+1}$; $F=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+1}-8\sqrt{5}$.

Questions de cours : *2 au choix de l'examinateur*

Ensembles et raisonnements 2 : applications.

- définition de l'image directe, exemple avec l'image directe par l'application p (qui à un étudiant de TSI2.1, associe la première lettre de son prénom) de l'ensemble des étudiants du groupe de colle ;
- définition de l'image réciproque, exemple avec l'application p et l'ensemble $\{A,B,C\}$.
- définition d'une application injective, et méthode pour montrer qu'une application est injective, ou n'est pas injective ;
- montrer que l'application p n'est pas injective, et que l'application f_2 : $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x^2\end{array}$ est injective ;
- définition d'une application surjective, et méthode pour montrer qu'une application est surjective, ou ne l'est pas ;
- montrer que l'application p n'est pas surjective, et que l'application f_3 : $\begin{array}{c}\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+\\ x\mapsto x^2\end{array}$ est surjective ;
- définition d'une application bijective et méthodes pour montrer qu'une application est bijective ;
- montrer que la fonction f_5 : $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^+ & \to & [1,+\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{1+x^2}\end{array}$ est une bijection et donner sa réciproque ;
- exemples « patates » : dessiner 4 applications en faisant tous les cas possibles en terme d'injectivité ou pas, surjectivité ou pas.

Calculs 4 : limites.

- 3 limites de référence ;
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-7x+1}{3x-6}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+4}$;
- limites issues du taux d'accroissement et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-e^x}$;
- théorème des croissances comparées et corollaires avec 3 preuves ($\frac{\ln(x)}{e^x}$ et $\frac{e^x}{x^n}$ et $\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$) ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-x^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;
- $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln(x-1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x+\ln(x)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^2+11x-6}{12x^4-3x^3+2x-4}$;

Questions d'application directe du cours :

- calcul de dérivée et/ou ensemble de dérivabilité ;
- trouver l'image ou l'image réciproque d'un ensemble par une application simple (avec courbe si on l'a ou tableau de variations, ou exemples « patates »…)
- justifier qu'une application simple est ou pas, injective, surjective, bijective ;
- déterminer une limite simple sans forme indéterminée.

Thèmes généraux des exercices :

- applications : ensembles image et image réciproque, injectivité, surjectivité, bijectivité, réciproque ;
- limites : tout sauf théorèmes d'encadrement et comparaison.

Bon courage !

Barème : calculs 4 points, cours 6 points, exercices 10 points.