Corrigé du DM n°6

Correction 1.

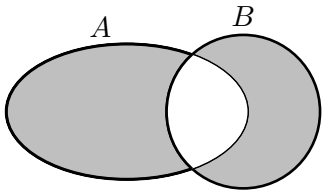
Soit x un élément de A, montrons que x est dans B.
$x \in A$ donc il existe un entier relatif k tel que $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$.

$$\begin{aligned}\text{Alors } -2\sin(5x) &= -2\sin\left(5(\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi)\right)\\ &= -2\sin\left(\tfrac{5\pi}{3} + 5\times 2k\pi\right)\\ &= -2\sin\left(\tfrac{5\pi}{3}\right)\\ &= -2\times\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

Donc $x \in B$.
Donc tout élément de A est dans B.
Donc $\boxed{A \text{ est inclus dans } B}$.

Correction 2.

1. $A\triangle B$ est la zone grisée



2. Si $A \subset B$, alors $A\backslash B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ donc $\boxed{A\triangle B = B\backslash A}$.
$A\triangle\emptyset = (A\backslash\emptyset) \cup (\emptyset\backslash A) = A \cup \emptyset$ donc $\boxed{A\triangle\emptyset = A}$.
$A\triangle E = (A\backslash E) \cup (E\backslash A) = \emptyset \cup \overline{A}$ donc $\boxed{A\triangle E = \overline{A}}$. Remarque : $A\triangle B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (B\backslash A) \cup (A\backslash B) = B\triangle A$, donc on pouvait utiliser la première égalité pour déduire les deux autres.

3.
$$\begin{aligned}A\triangle B &= (A\backslash B) \cup (B\backslash A)\\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \text{ définition de } \backslash\\ &= \left(A \cap \overline{B}) \cup B\right) \cap \left((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}\right) \text{ on a distribué le } (A \cap \overline{B})\\ &= \left((A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)\right) \cap \left((A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})\right) \quad \text{dans chaque grande parenthèse, on a distribué le terme de droite}\\ &= \left((A \cup B) \cap E\right) \cap \left(E \cap (\overline{A} \cup \overline{B})\right)\\ &= \left(A \cup B\right) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\\ &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \text{ règle sur les complémentaires et intersection et réunion}\\ &= (A \cup B)\backslash(A \cap B) \text{ définition de } \backslash\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{A\triangle B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)}$.

4.
- Si $A = B = \emptyset$, alors $A\triangle B = \emptyset$ et $A \cap B = \emptyset$ donc l'égalité est vraie.
- Réciproquement, si $A\triangle B = A \cap B$, alors $(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = A \cap B$.
  Or $(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \subset \overline{A \cap B}$ donc on a $A \cap B \subset \overline{A \cap B}$ donc $A \cap B = \emptyset$.
  Et donc d'après l'hypothèse, $A\triangle B = \emptyset$.
  Or avec $A \cap B = \emptyset$, on a $A\triangle B = A \cup B$ donc $A \cup B = \emptyset$.
  $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc $A = B = \emptyset$.

Donc $\boxed{A\triangle B = A \cap B \iff A = B = \emptyset}$.

Correction 3.

1. On cherche le signe de $-2x^2+5x-2$: $\triangle = 5^2-4\times(-2)\times(-2) = 9$, $x_1 = \frac{-5-3}{2\times(-2)} = 2$ et $x_2 = \frac{-5+3}{2\times(-2)} = \frac{1}{2}$
Et $a = -2 > 0$.
De plus, $4x+3 > 0 \iff 4x > -3 \iff x > -\frac{3}{4}$.
Donc :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$-2x^2+5x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$4x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$\frac{-2x^2+5x-2}{4x+3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -\frac{3}{4}[\cup]\frac{1}{2}, 2[}$.

2. $(2x+1)(3x+4) \leqslant (2x+1)(x+5) \iff (2x+1)(3x+4) - (2x+1)(x+5) \leqslant 0$
$\iff (2x+1)\big(3x+4-(x+5)\big) \leqslant 0$
$\iff (2x+1)(3x+4-x-5) \leqslant 0$
$\iff (2x+1)(2x-1) \leqslant 0$

Or

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+1)(2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

car $2x+1 > 0 \iff 2x > -1 \iff x > -\frac{1}{2}$
car $2x-1 > 0 \iff 2x > 1 \iff x > \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$.

3. $\dfrac{-1}{-2x+7} < \dfrac{2x}{x+4} \iff \dfrac{-1}{2x+7} - \dfrac{2x}{x+4} < 0$
$\iff \dfrac{-(x+4) - 2x(-2x+7)}{(x+4)(2x+7)} < 0$
$\iff \dfrac{4x^2-15x-4}{(x+4)(-2x+7)} < 0$

• Signe de $4x^2-15x-4$: $\triangle = (-15)^2 - 4\times 4\times(-4) = 289 = 17^2$
$x_1 = \dfrac{15+17}{2\times 4} = 4$ et $x_2 = \dfrac{15-17}{2\times 4} = -\frac{1}{4}$.
Et $a = 4 > 0$ donc « $+0-0+$ ».
• $x+4 > 0 \iff x > -4$
• $-2x+7 > 0 \iff 7 > 2x \iff x < \frac{7}{2}$
Donc

x	$-\infty$		-4		$-\frac{1}{4}$		$\frac{7}{2}$		4		$+\infty$
$4x^2-15x-4$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$-2x+7$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{4x^2-15x-4}{(x+4)(-2x+7)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -4[\cup]-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}[\cup]4, +\infty[}$.

Attention : « $(2x+1)(2x-1) \geqslant 0$ » N'est PAS équivalent à « $2x+1 \geqslant 0$ ou $2x-1 \geqslant 0$ ».