Corrigé du DM n°7

Correction 1.

$$\begin{aligned}A &= \cos\left(\pi - \tfrac{9\pi}{10}\right) + \cos\left(\pi - \tfrac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\tfrac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\tfrac{9\pi}{10}\right)\\ &= -\cos\left(\tfrac{9\pi}{10}\right) - \cos\left(\tfrac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\tfrac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\tfrac{9\pi}{10}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{A = 0}$

$$\begin{aligned}B &= \cos\left(\tfrac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\tfrac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(\tfrac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(2\pi - \tfrac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\pi + \tfrac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\pi + \tfrac{\pi}{10}\right)\\ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\tfrac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(\tfrac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(-\tfrac{3\pi}{5}\right) - \cos\left(\tfrac{3\pi}{5}\right) - \cos\left(\tfrac{\pi}{10}\right)\\ &= \sin\left(\tfrac{3\pi}{5}\right) - \sin\left(\tfrac{3\pi}{5}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{B = 0}$

$$\begin{aligned}C &= \sin\left(\tfrac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\tfrac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(2\pi - \tfrac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(2\pi - \tfrac{2\pi}{5}\right)\\ &= \sin\left(\tfrac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\tfrac{4\pi}{5}\right) - \sin\left(\tfrac{4\pi}{5}\right) - \sin\left(\tfrac{2\pi}{5}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{C = 0}$

Correction 2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\imath} &= \left((\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{k})\overrightarrow{\jmath} - (\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{\jmath})\overrightarrow{k}\right).\overrightarrow{\imath}\\ &= (\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{k})(\overrightarrow{\jmath}.\overrightarrow{\imath}) - (\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{\jmath})(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{\imath})\\ &= (\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{k})(\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{\jmath}) - (\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{\jmath})(\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{k}) \quad \text{car le produit scalaire est symétrique}\\ &= 0 \qquad \text{car le produit des nombres est commutatif}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{les vecteurs } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{\imath} \text{ sont orthogonaux}}$.

Correction 3.

1. Soit $u \in B$, montrons que $u \in A$.
$u \in B$ donc il existe un réel t tel que $u = (-t+3, t+1, t+5)$.
Alors $2(-t+3) + 3(t+1) - (t+5) = -2t + 6 + 3t + 3 - t - 5 = 0t + 4 = 4$.
Donc $u \in A$.
On a bien montré que $\boxed{B \subset A}$.

2. On note $u = (-1; 2; 0)$.
$2 \times (-1) + 3 \times 2 - 0 = -2 + 6 = 4$ donc $u \in A$.
Cherchons t dans $\mathbb{R}$ tel que $u = (-t+3, t+1, t+5)$.
Alors t est solution de $\begin{cases} t+3 = -1 \\ t+1 = 2 \\ t+5 = 0 \end{cases}$
D'après la 3ème ligne, $t = -5$, dans la 2ème ligne $-5+1 = -4 \neq 2$ donc ce n'est pas compatible.
Donc $u \notin B$.
Donc $\boxed{A \text{ n'est pas inclus dans } B}$.

Correction 4.

1. $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = \cos(2x-1)$ et $v(x) = e^{3x+4} + 5$.

- u est la composée d'un polynôme par le cosinus, les deux fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc u aussi.
- $x \mapsto e^{3x+4}$ est la composée de deux fonctions usuelles définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, et on ajoute la constante 5, donc v est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ car pour tout x, $e^{3x+4} > 0$ donc $e^{3x+4} + 5 > 0$.

Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$.
$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, et $u'(x) = -2\sin(2x-1)$ et $v'(x) = 3e^{3x+4}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x-1)(e^{3x+4}+5) - \cos(2x-1)\times 3e^{3x+4}}{(e^{3x+4}+5)^2}$.

$$= \boxed{-\dfrac{e^{3x+4}(3\cos(2x-1)+2\sin(2x-1)) + 10\sin(2x-1)}{(e^{3x+4}+5)^2}}$$

2. f est la somme d'un polynôme et de la fonction $x \mapsto -5 \times \frac{1}{x^4}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}^*}$ et $\boxed{f'(x) = 5x^4 - 8x + 2 + \frac{20}{x^5}}$.

3. $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 3x+5$.
u est un polynôme défini et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est définie partout où $u(x) \geqslant 0$ et f est dérivable partout où $u(x) > 0$.
Or $u(x) > 0 \iff 3x+5 > 0 \iff 3x > -5 \iff x > -\frac{5}{3}$
Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } [-\frac{5}{3}, +\infty[\text{ et dérivable sur }]-\frac{5}{3}, +\infty[}$.
Et $\sqrt{u}' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc $\boxed{f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+5}}}$.

4. $f = u^3$ avec $u(x) = \frac{3x+4}{2x^2+5x-12}$.
u est une fraction rationnelle, on résout $2x^2+5x-12 = 0$
$\Delta = 5^2 - 4\times 2\times(-12) = 25+96 = 121$ donc $x_1 = \frac{-5-11}{2\times 2} = -4$ et $x_2 = \frac{-5+11}{2\times 2} = \frac{3}{2}$.
Or la fonction cube est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}\setminus\left\{-4; \frac{3}{2}\right\}}$.
Et $u'(x) = \frac{3(2x^2+5x-12)-(3x+4)(4x+5)}{(2x^2+5x-12)^2} = \frac{6x^2+15x-36-12x^2-15x-16x-20}{(2x^2+5x-12)^2} = \frac{-6x^2-16x-56}{(2x^2+5x-12)^2}$.
Donc $\boxed{f'(x) = 3\times\dfrac{-6x^2-16x-56}{(2x^2+5x-12)^2}\left(\dfrac{3x+4}{2x^2+5x-12}\right)^2}$.

Correction 5.

1. f est la somme d'un polynôme défini et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction ln (multipliée par -3), définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur }]0,+\infty[}$.
Pour $x > 0$, $f'(x) = 3x^2 - 3\times\frac{1}{x} = 3\frac{x^3-1}{x}$.
La fonction x^3 est croissante et pour $x > 0$, $x^3 = 1 \iff x = 1$, on en déduit que $f'(x) < 0$ pour $x \in]0,1[$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 1$.
Donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0,1[\text{ et croissante sur }]1,+\infty[}$.

2. $f(x) = u(x) + e^{v(x)}$ avec $u(x) = x-1$ et $v(x) = -x+1$.
$\star$ u est un polynôme défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\star$ v est un polynôme défini et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc e^v est aussi défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x) + v'(x)e^{v(x)} = 1 - e^{-x+1}$.
Donc $f'(x) > 0 \iff 1 > e^{-x+1}$
$\iff 0 > -x+1$ (car ln est strictement croissante)
$\iff x > 1$
Donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]-\infty,1[\text{ et croissante sur }]1,+\infty[}$.

3. f est une fraction rationnelle, $2x-1 \neq 0 \iff x \neq \frac{1}{2}$ donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}}$
$f'(x) = \dfrac{4(2x-1)-(4x-5)\times 2}{(2x-1)^2} = \dfrac{6}{(2x-1)^2}$ ce qui est toujours strictement positif (pour $x \neq \frac{1}{2}$).
Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty,\frac{1}{2}[\text{ et strictement croissante sur }]\frac{1}{2},+\infty[}$.

Attention : f n'est pas croissante sur $]-\infty,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},+\infty[$!

Correction 6.

1. • $f(-2)=2, f(-1)=1, f(0)=0, f(1)=1$ donc $\boxed{f([\![-2,1]\!])=[\![0;2]\!]}$

• $x\in f^{-1}([\![-2,1]\!]) \iff |x|=-2$ ou -1 ou 0 ou 1 donc $\boxed{f^{-1}([\![-2,1]\!])=[\![-1,1]\!]}$

• $f^{-1}(f([\![-2,1]\!]))=f^{-1}([\![0;2]\!])=\boxed{[\![-2,2]\!]}$

• $f(f^{-1}([\![-2,1]\!]))=f([\![-1,1]\!])=\boxed{[\![0,1]\!]}$

2. (avec une courbe pour justifier) : $g(\mathbb{R})=[-1,1]$, $g([0,\pi[)=[0,1]$, $g^{-1}([-1,1[)=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ et $g^{-1}([3,4])=\emptyset$.

3. • $h(10)=2\times10+3=23$, $h(11)=2\times11+3=25$, $h(12)=27$, $h(13)=29$ et $h(14)=31$, donc $\boxed{h([\![10,14]\!])=\{23;25;27;29;31\}}$

• $x\in h^{-1}([\![0,5]\!]) \iff x\in\mathbb{Z}$ et $0\leqslant 2x+3\leqslant 5$.
Or $0\leqslant 2x+3\leqslant 5 \iff -3\leqslant 2x\leqslant 2 \iff -\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 1$.
On prend donc les entiers entre $-\frac{3}{2}$ et 1 donc $\boxed{h^{-1}([\![0,5]\!])=\{-1;0;1\}}$.

Correction 7.

1. **(a)** $\exists e\in E, n(e)\geqslant 10$.

(b) $\forall e\in E, n(e)\geqslant 10$.

(c) $\forall e\in E, n(e)\leqslant 10$.

(d) $\forall e\in E, n(e)\leqslant n(\text{Yannick})$.

(e) $\forall e\in E\setminus\{\text{Arno}\}, n(e)\neq n(\text{Arno})$.

(f) $\exists! e\in E, n(e)=17$ ou :
$\exists e\in E, n(e)=17$ et $\forall f\in E\setminus\{e\}, n(f)\neq 17$

2. **(a)** Aucun élève n'a eu 10 ou plus de 10, donc ils ont tous eu moins que 10 : $\forall e\in E, n(e)<10$.

(b) Au moins un élève a eu strictement moins de 10 : $\exists e\in E, n(e)<10$.

(c) Au moins un élève a eu plus que 10 : $\exists e\in E, n(e)>10$.

(d) Yannick n'a pas eu la meilleure note : $\exists e\in E, n(e)>n(\text{Yannick})$.

(e) Au moins un élève a eu la même note que Arno : $\exists e\in E\setminus\{\text{Arno}\}, n(e)=n(\text{Arno})$.

(f) Aucun élève n'a eu 17 ou au moins deux élèves ont eu 17 :
$\forall e\in E, n(e)\neq 17$ ou $\exists (e,f)\in E^2, e\neq f$ et $n(e)=n(f)=17$.

3. La **(b)** implique la **(a)**, et la **(f)** implique la **(a)**.

Correction 8.

(a) $-x^2+2x-1>1 \iff -x^2+2x-2>0$
Pour $-x^2+2x-2$: $\Delta=4-8<0$ or $a=-1<0$ donc le polynôme $-x^2+2x-2$ est toujours strictement négatif donc $\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$.

(b) On note $P(x)=-2x^3-9x^2-3x+4$.
$P(-1)=-2\times(-1)^3-9\times(-1)^2-3\times(-1)+4=2-9+3+4=0$.
Donc on peut diviser P par $(x+1)$.
Par division euclidienne ou identification des coefficients, on trouve $P(x)=(x+1)(-2x^2-7x+4)$.
Pour $-2x^2-7x+4$, $\Delta=49+32=81$ donc $r_1=\frac{7-9}{2\times(-2)}=\frac{1}{2}$ et $r_2=\frac{7+9}{2\times(-2)}=-4$
Donc $P(x)=-2(x+1)(x-\frac{1}{2})(x+4)$.
Les trois fonctions affines sont croissantes, donc :

x	$-\infty$		-4		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
-2		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	
$x+1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-\frac{1}{2}$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -4[\cup]-1, \frac{1}{2}[}$.

(c) $1 + x \geqslant \frac{1}{x} \iff 1 + x - \frac{1}{x} \geqslant 0 \iff \frac{x+x^2-1}{x} \geqslant 0$
Pour le polynôme $x^2 + x - 1$:
$\Delta = 1 + 4 = 5$ donc $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, et $a = 1 > 0$ donc « $+0-0+$ ».

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-1		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\frac{x+x^2-1}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0\right[\cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[}$.

(d) $|3x + 2| = 3 \iff 3x + 2 = 3$ ou $3x + 2 = -3$
$\iff 3x = 1$ ou $3x = -5$
$\iff x = \frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{5}{3}$
Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\}}$.

(e) $|-4x + 1| \leqslant 3 \iff -3 \leqslant -4x + 1 \leqslant 3$
$\iff -4 \leqslant -4x \leqslant 2$
$\iff 1 \geqslant x \geqslant -\frac{1}{2}$
Donc $\boxed{\mathcal{S} = [-\frac{1}{2}, 1]}$.

(f) $|3x + 4| < 5 \iff -5 < 3x + 4 < 5$
$\iff -9 < 3x < 1$
$\iff -3 < x < \frac{1}{3}$
Donc $\boxed{\mathcal{S} =]-3; \frac{1}{3}[}$.

(g) $|-2x + 3| > 1 \iff -2x + 3 > 1$ ou $-2x + 3 < -1$
$\iff -2x > -2$ ou $-2x < -4$
$\iff x < 1$ ou $x > 2$
Donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[}$.

(h) $|2x + 3| \geqslant 2 \iff 2x + 3 \geqslant 2$ ou $2x + 3 \leqslant -2$
$\iff 2x \geqslant -1$ ou $2x \leqslant -5$
$\iff x \geqslant -\frac{1}{2}$ ou $x \leqslant -\frac{5}{2}$
Donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [-\frac{1}{2}; +\infty[}$.

(i) $|2x^2 - 2x - 2| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant 2x^2 - 2x - 2 \leqslant 2 \iff -1 \leqslant x^2 - x - 1 \leqslant 1$.

- $-1 \leqslant x^2 - x - 1 \iff 0 \leqslant x^2 - x$ et $x^2 - x = x(x-1)$ donc ses racines sont 0 et 1, et $a = 1 > 0$ donc $-1 \leqslant x^2 - x - 1 \iff \underline{x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[}$.
- $x^2 - x - 1 \leqslant 1 \iff x^2 - x - 2 \leqslant 0$.
  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 9$, $r_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ et $r_2 = \frac{1+3}{2} = 2$.
  Et $a = 1 > 0$ donc $x^2 - x - 1 \leqslant 1 \iff \underline{x \in [-1; 2]}$.

Donc $\mathcal{S} = \Big(]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\Big) \cap [-1; 2]$ donc $\boxed{\mathcal{S} = [-1, 0] \cup [1, 2]}$.

Correction 9. (réponses).

(a) $-\frac{2}{3}$
(b) $\frac{63}{8}$
(c) $\frac{3}{8}$
(d) $\frac{13}{9}$
(e) $-\frac{3}{20}$
(f) $\frac{63}{2}$
(g) 9
(h) $\frac{2}{3}$

Correction 10. (réponses).

(a) 20
(b) $9+4\sqrt{5}$
(c) 12
(d) $9-\frac{10}{3}\sqrt{2}$
(e) $12\sqrt{7}$
(f) 32
(g) 1
(h) 4
(i) $|a-b|$

Remarque pour la (g) : $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1$