Étude de fonctions.

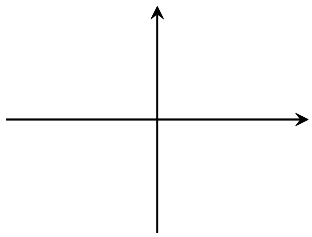
I. Propriétés des fonctions

Dans cette partie, le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Parité, imparité

Définition.

Soit f une fonction.
On suppose que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0
(autrement dit : pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$).



- f est ***paire*** signifie : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x)$.
- f est ***impaire*** signifie : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = -\Big(f(x)\Big)$.

Remarque : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$, $[-5,5]$ ... sont symétriques par rapport à l'origine,
mais $\mathbb{R}^+$, $[-1;1[$, $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ ... ne le sont pas.

Interprétation graphique et conséquence sur l'étude de fonction :

La courbe d'une fonction paire est .....

La courbe d'une fonction impaire est .....

Donc lorsqu'une fonction est paire ou impaire, on étudie $f|_{\mathbb{R}^+\cap\mathcal{D}_f}$ et on déduit l'autre partie par symétrie.

Exemples : $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x + \frac{3}{x}$, $h(x) = x^3 - x^2 + 1$: ces fonctions sont-elles paires ? impaires ?

Méthode pour une fonction f dont l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à l'origine :

- pour montrer que f est paire ou impaire :
  « $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = \ldots$ » (*remplacer tous les x par $(-x)$ dans l'expression de f*)
  puis transformer l'expression pour faire apparaître $f(x)$ ou $-f(x)$ (éventuellement, expliciter $-(f(x))$).
- pour montrer que f n'est ni paire ni impaire, il faut un contre-exemple, c'est-à-dire trouver une valeur de x pour laquelle $f(-x)$ n'est égal ni à $f(x)$ ni à $-f(x)$: on remplace x par un nombre, et on fait le calcul de $f(x)$, et celui de $f(-x)$.

2) périodicité

Définition.

Soit T un réel strictement positif.
Une fonction f est dite ***périodique de période*** T, ou T***-périodique*** lorsque :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x + T \in \mathcal{D}_f \ \text{ et } \ f(x+T) = f(x)$$

Exemples : les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π (ou 2π-périodiques).

Interprétation graphique et conséquence sur l'étude de fonction :
La courbe d'une fonction T-périodique est invariante par translation de vecteur $T\vec{\imath}$.
Ainsi, il suffit d'étudier f sur une période (un intervalle de longueur T, par exemple $[0,T]\cap\mathcal{D}_f$ ou $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]\cap\mathcal{D}_f$). Ensuite on déduit le reste de la courbe par translations.

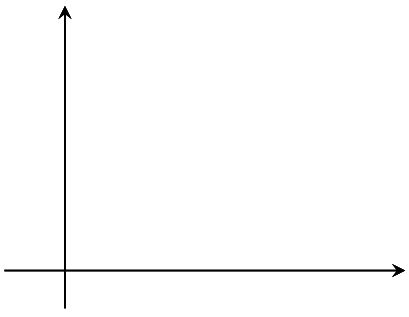
Exemple : montrer que $f : x \mapsto \cos(3x+\frac{1}{2})$ est $\frac{2\pi}{3}$-périodique.

Propriété.
Soient $\omega\in\mathbb{R}^*$ et $\varphi\in\mathbb{R}$.
Les fonctions $x\mapsto\cos(\omega x+\varphi)$ et $x\mapsto\sin(\omega x+\varphi)$ sont $\frac{2\pi}{|\omega|}$-périodiques.

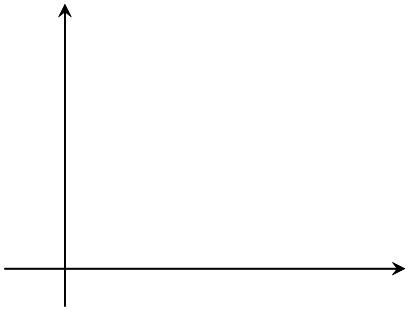
Exercice : on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x)=\frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}$, montrer que f est π-périodique et impaire et en déduire un intervalle d'étude le plus petit possible.

3) Variations

Caractérisations de la croissance d'une fonction.
Une fonction f est dite ***croissante sur un ensemble*** $\mathcal{D}$ si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :
- ⋆ sa courbe représentative monte dans la partie correspondant à $\mathcal{D}$.
- ⋆ si x augmente (en restant dans $\mathcal{D}$), alors $f(x)$ augmente.
- ⋆ pour tous a et b de $\mathcal{D}$: $a\leqslant b\iff f(a)\leqslant f(b)$.
- ⋆ les nombres et leurs images sont rangés dans le même ordre « f conserve l'ordre ».
- ⋆ lorsque $\mathcal{D}$ est un intervalle et que f est dérivable sur $\mathcal{D}$: $\forall x\in\mathcal{D},\ f'(x)\geqslant 0$.



Caractérisations de la décroissance d'une fonction.
Et une fonction f est ***décroissante sur*** $\mathcal{D}$ si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :
- ⋆ .....
- ⋆ .....
- ⋆ .....
- ⋆ .....
- .....
- ⋆ .....



Vocabulaire : une fonction f est dite ***monotone*** si elle est croissante sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, ou si elle est décroissante sur $\mathcal{D}_f$.

Remarque importante : si, pour a et b dans $\mathcal{D}$ tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$, alors f est dite ***strictement croissante sur*** $\mathcal{D}$. C'est le cas aussi avec lorsque si $f'(x) > 0$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).
Même chose avec ***strictement décroissante***, et cela s'applique de la même façon à la monotonie : strictement monotone si strictement croissante, ou si strictement décroissante.

Exemple : on note pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

Cette fonction est ...

En effet :

Propriété.

- Soient f et g des fonctions définies sur l'intervalle I :
  - ⋆ si f et g sont croissantes sur I alors $f + g$ est croissante sur I ;
  - ⋆ si f et g sont décroissantes sur I alors $f + g$ est décroissante sur I.
- Soient f définie sur I et g définie sur J avec $f(I) \subset J$: si f et g sont toutes deux croissantes, ou toutes deux décroissantes, alors $g \circ f$ est croissante sur I.



Attention : c'est plus compliqué pour produit, différence et quotient ! Pas de raccourcis dans ces cas là.

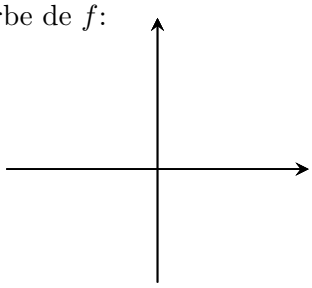
4) Tangente

Propriété.



Si f est dérivable en a, une équation de la tangente au point $A(a, f(a))$ est : $\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$.

Exemple : $f : x \mapsto x^3$, on cherche une équation de la tangente en 1 à la courbe de f:



Remarques :

- Cette équation répond aux critères de la tangente :
  - ⋆ le coefficient directeur est le nombre dérivé : $f'(a)$;
  - ⋆ lorsque $x = a$, on a $y = f(a)$: la courbe et la tangente sont confondues au point $A(a, f(a))$.
- Lorsque $f'(a)$ est nul, la tangente est horizontale.

5) bornes

Définitions.

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.

- On dit que f est ***majorée*** lorsque : .....
  M est appelé ***majorant*** de f sur $\mathcal{D}_f$.
  (autrement dit : il existe un réel M tel que les valeurs prises par la fonction f sont toutes plus petites que M)
- On dit que f est ***minorée*** lorsque : .....
  m est un nombre, appelé un ***minorant*** de f sur $\mathcal{D}_f$.
- On dit que f est ***bornée*** si elle est majorée et minorée sur $\mathcal{D}_f$.
  Autrement dit .....

Remarques : f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.
Avec $I \subset \mathcal{D}_f$, on dit que f est majorée par M sur I si pour tout x de I, $f(x) \leqslant M$, autrement dit $f|_I$ est majorée par M.

Définitions.

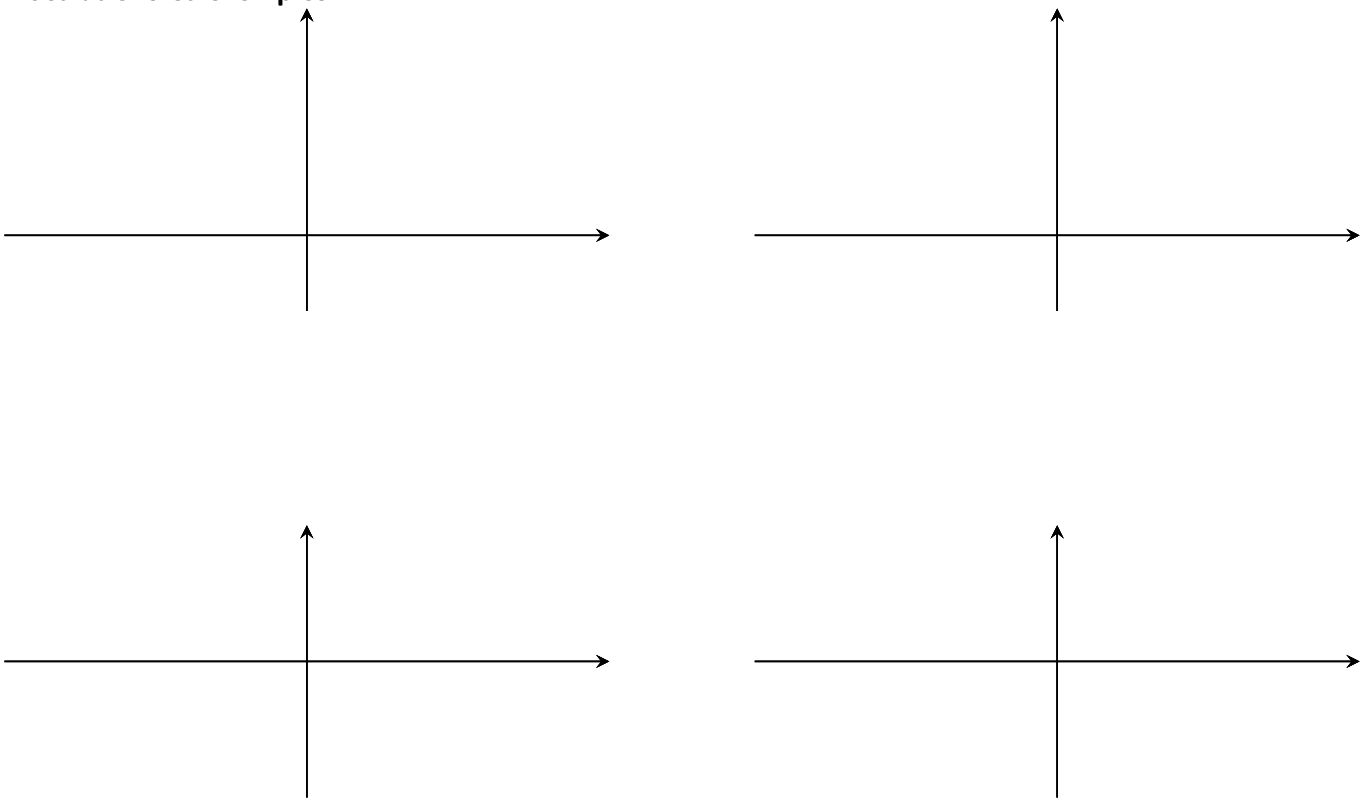
f est une fonction et $a \in \mathcal{D}_f$.

- On dit que f admet un ***maximum global*** (respectivement ***minimum global***) en a si :

  .....

- On dit que f admet un ***maximum local*** (respectivement ***minimum local***) en a si :
  $\exists \delta > 0, \forall x \in]a-\delta; a+\delta[\cap \mathcal{D}_f,\ f(x) \leqslant f(a)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(a)$).

Illustrations et exemples :



II. Bijection et réciproque

1) bijection

Définition (rappel).

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$.

f est une ***bijection*** de I dans J si .....

.....

Propriété.

Si f est strictement monotone, alors elle est injective.
Conséquence : si f est strictement monotone sur un intervalle I, alors elle réalise une bijection de I dans $f(I)$.

Méthode (provisoire) pour montrer qu'une fonction est une bijection : on construit le tableau des variations avec les limites et extrema, puis
⋆ « la fonction est strictement croissante/décroissante sur l'intervalle I »;
⋆ on détermine $f(I)$ « d'après le tableau des variations »;
On conclut : « f réalise une bijection de I dans ... ».

Exemple : la fonction f est définie sur $]-\infty;4]$ et on donne le tableau de ses variations.

x	$-\infty$		2		4
$f(x)$	7	↘	-10	↗	-3

⋆ f est strictement décroissante sur $]-\infty,2]$;
⋆ d'après le tableau de variations $f(]-\infty,2]) =$ .....

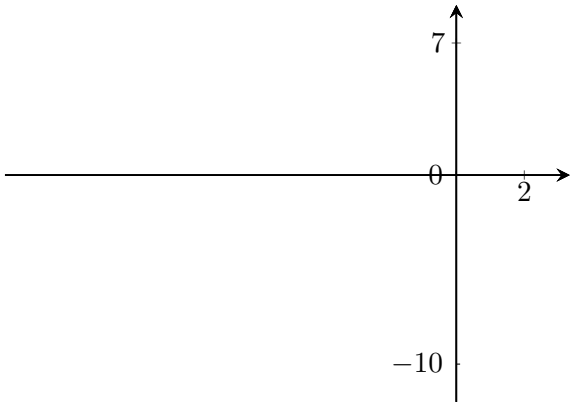
Donc f réalise une bijection de ..... dans .....

2) réciproque

La fonction f précédente réalise une bijection de $]-\infty;2]$ dans $[-10;7[$.
Ainsi, tout nombre y entre -10 et 7 a un unique antécédent par f dans $]-\infty;2]$, c'est-à-dire un nombre x de $]-\infty;2]$ tel que $f(x)=y$.
Ce procédé permet de construire la fonction réciproque de f, notée f^{-1}.

f^{-1} : $[-10;7[\to]-\infty;2]$.
$y \mapsto x$ tel que $f(x)=y$

Ainsi par exemple $f^{-1}(\dots) = \dots$ car $f(2) = -10$.



Rappel : Si f est une bijection de I dans J, on appelle réciproque de f la fonction notée f^{-1}, qui à tout nombre y de J associe son unique antécédent x par f, c'est-à-dire : $\boxed{\begin{array}{rcl} f^{-1} : J & \to & I \\ y & \mapsto & x \text{ tel que } f(x)=y \end{array}}$

En particulier, si f est une bijection : $\boxed{f(x)=y \iff x=f^{-1}(y)}$.

Propriété.

Soit f une fonction strictement monotone qui réalise une bijection de I dans J. Alors :
- son application réciproque f^{-1} est strictement monotone sur J, de même sens de variation que f ;
- la représentation de f^{-1} se déduit de celle de f par symétrie par rapport à la droite $y=x$;
- si f est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable et $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$.

Exemple : on note $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+2}$, montrer que f réalise une bijection de $]-2,+\infty[$ dans un intervalle J que l'on précisera.
Tracer l'allure de la courbe de f et sa réciproque (on fera figurer sur le graphique les asymptotes, et la valeur en 0 de la fonction f, ainsi que la tangente en 0).

Remarque : il se peut que l'on ne puisse pas trouver d'expression simple pour f^{-1}, bien que l'on connaisse certaines de ses caractéristiques (ensemble de définition, variations, courbe ...)

III. Plan d'étude d'une fonction

L'étude d'une fonction se fait à partir des étapes suivantes (en général, les énoncés vous guident) :

- ⋆ déterminer l'ensemble de définition ;
- ⋆ déterminer les éventuelles périodicité et symétrie (avec la parité) pour restreindre l'ensemble d'étude de la fonction ;
- ⋆ déterminer les limites aux bords ouverts de l'ensemble d'étude, et repérer les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales ;
- ⋆ dresser le tableau des variations complet de la fonction (extrema et limites)
  pour cela en général on dérive la fonction et on étudie le signe de la dérivée, il faut donc avant tout vérifier la dérivabilité de la fonction sur l'intervalle d'étude ;
- ⋆ tracer l'allure de la représentation graphique de la fonction (on commence par analyser l'ensemble de définition et les extrema, majorants ou limites pour bien positionner le repère, puis on place les points que l'on a éventuellement déterminés, notamment les extrema, puis tangente(s) et asymptote(s) ... et on « relie le tout de manière artistique »)