DS2B - Maths - Correction

Durée: 2h

Problème 1.

Partie I - Exemple

Q1. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. On calcule les images de ces vecteurs : $f(e_1) = \frac{1}{4}(1,3)$ et $f(e_2) = \frac{1}{4}(3,1)$.

On obtient alors la matrice $\boxed{A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$.

On calcule ensuite $A^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Enfin, on calcule la matrice de $\frac{1}{2}(f + id)$: $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1+4 & 3 \\ 3 & 1+4 \end{pmatrix} = A^2$.

On constate que l'égalité de matrices, on a donc $\boxed{f^2 = \frac{1}{2}(f + id)}$.

Q2. On calcule le polynôme caractéristique de f :

$$\begin{aligned}
\chi_f(X) &= \det(XI_2 - A) \\
&= \begin{vmatrix} X - \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{-3}{4} & X - \frac{1}{4} \end{vmatrix} \\
&= \big(X - \frac{1}{4}\big)^2 - \big(\frac{-3}{4}\big)^2 \\
&= \big(X - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\big)\big(X - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\big) \\
&= \big(X - 1\big)\big(X + \frac{1}{2}\big)
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, on en déduit que f est diagonalisable.

Détermination de E_1 :

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = x \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y = y \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y = 4x \\ 3x + y = 4y \end{cases} \iff x = y$$

Ainsi, $E_1 = \overrightarrow{(}1,1)$.

Détermination de $E_{-1/2}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = \frac{-1}{2}x \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y = \frac{-1}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y = -2x \\ 3x + y = -2y \end{cases} \iff x = -y$$

Ainsi, $E_{-1/2} = \overrightarrow{(}1,-1)$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est diagonalisable et une base de vecteurs propres est } \big((1,1),(1,-1)\big).}$

Partie II - Cas général

Q3. $f^2 = \frac{1}{2}(f - Id_E) \iff 2f^2 - f = -Id_E \iff f(Id_E - 2f) = Id_E$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est inversible et } f^{-1} = Id_E - 2f.}$

Q4. $\boxed{\ker(f - Id_E) \text{ et } \ker(f + \frac{1}{2}Id_E) \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } E}$ car ce sont des noyaux d'applications linéaires.

Q5. On va commencer par montrer que $\ker(f - Id_E) \oplus \ker(f + \frac{1}{2}Id_E)$:

Soit $x \in \ker(f - Id_E) \oplus \ker(f + \frac{1}{2}Id_E)$.

D'un coté, $x \in \ker(f - Id_E)$ donc $f(x) = x$. De l'autre, $x \in \ker(f + \frac{1}{2}Id_E)$ donc $f(x) = \frac{-1}{2}x$.

Ainsi, on doit avoir $x = \frac{-1}{2}x$ d'où $x = 0$.

Puisque l'intersection est réduite à $\{0\}$, on déduit que $\ker(f - Id_E) \oplus \ker(f + \frac{1}{2}Id_E)$.

Procédons par analyse/synthèse :

Analysons le problème : Soit $x \in E$. On suppose que $x = y + z$ où $y \in \ker(f - Id_E)$ et $z \in \ker(f + \frac{1}{2}Id_E)$.

On aura alors $f(y) = y$ et $f(z) = \frac{-1}{2}z$. Ainsi, $f(x) = f(y) + f(z) = y - \frac{1}{2}z = x - \frac{3}{2}z$.

On en déduit alors que $z = \frac{2}{3}(x - f(x))$ et que $y = x - z = \frac{1}{3}(x - 2f(x))$.

Synthèse : Soit $x \in E$. On pose $y = \frac{1}{3}(x+2f(x))$ et $z = \frac{2}{3}(x-f(x))$. On a bien $x = y+z$.

D'autre part, on vérifie que $y \in \ker(f - Id_E)$:

$$\begin{aligned}(f - Id_E)(y) &= f(y) - y \\ &= \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}f^2(x) - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}f(x) \\ &= \frac{-1}{3}f(x) - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}(f(x) + x) \qquad (\text{car } 2f^2 = f + Id_E) \\ &= 0\end{aligned}$$

On doit aussi vérifier que $z \in \ker(f + \frac{1}{2}Id_E)$:

$$\begin{aligned}(f + \frac{1}{2}Id_E)(z) &= \frac{2}{3}f(x) - \frac{2}{3}f^2(x) + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}f(x) \\ &= \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}(f(x) + x) \qquad (\text{car } 2f^2 = f + Id_E) \\ &= 0\end{aligned}$$

On a ainsi montré que $x \in \ker(f - Id_E) + \ker(f + \frac{1}{2}Id_E)$.

Conclusion, $\boxed{E = \ker(f - Id_E) \oplus \ker(f + \frac{1}{2}Id_E)}$.

Q6. On calcule directement sur les applications

$$\begin{aligned}(f+\frac{1}{2}Id_E)\circ(f-Id_E) &= f\circ(f-Id_E)+\frac{1}{2}(f-Id_E)\\ &= f^2-f+\frac{1}{2}\big(f-Id_E\big)\\ &= \frac{1}{2}(f+Id_E)-\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}x\\ &= 0\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathrm{Im}(f-Id_E)\subset\ker(f+\frac{1}{2}Id_E)$.
De plus, le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme (f_Id_E) donne :

$$\dim(E)=\dim(\ker(f-Id_E))+\dim(\mathrm{Im}(f-Id_E))$$

et la somme directe de la question précédente donne

$$\dim(E)=\dim(\ker(f-Id_E))+\dim(\ker(f+\frac{1}{2}Id_E))$$

Conclusion : $\dim(\mathrm{Im}(f-Id_E))=\dim(\ker(f+\frac{1}{2}Id_E))$.
Étant donné qu'on a une inclusion, ceci prouve l'égalité : $\boxed{\mathrm{Im}(f-Id_E)=\ker(f+\frac{1}{2}Id_E).}$

Q7. Calcul direct :

$$f^3=f\circ f^2=f\circ(\frac{1}{2}(f+Id_E))=\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}f=\frac{1}{4}(f+Id_E)+\frac{1}{2}f=\frac{3}{4}f+\frac{1}{4}Id_E$$

et

$$f^4=f\circ f^3=f\circ(\frac{3}{4}f+\frac{1}{4}Id_E)=\frac{3}{4}f^2+\frac{1}{4}f=\frac{3}{9}(f+Id_E)+\frac{1}{4}f=\frac{5}{8}f+\frac{3}{8}Id_E$$

On obtient donc $\boxed{f^3=\frac{3}{4}f+\frac{1}{4}Id_E \text{ et } f^4=\frac{5}{8}f+\frac{3}{8}Id_E}$.

Q8. Montrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $(a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f^n=a_nf+b_nId_E$.

Initialisation : Si on pose $a_0=0$ et $b_0=1$, on a bien $f^0=Id_E=a_0f+b_0Id_E$.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. On suppose qu'il existe $a_n,b_n\in\mathbb{R}$, tel que $f^n=a_nf+b_nId_E$. Montrons que c'est encore vrai pour $n+1$:

$$\begin{aligned}f^{n+1} &= f\circ f^n=f\circ(a_nf+b_nId_E)\\ &= a_nf^2+b_nf=\frac{a_n}{2}(f+Id_E)+b_nf\\ &= \Big(\frac{a_n}{2}+b_n\Big)f+\frac{a_n}{2}Id_E\end{aligned}$$

Posons $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+b_n$ et $b_{n+1}=\frac{a_n}{2}$. Ces réels existent donc bien.

La récurrence est établie.

D'après ce qui vient d'être démontré, $\boxed{a_0=1,\ b_0=1,\ a_1=1 \text{ et } b_1=0}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+b_n \text{ et } b_{n+1}=\frac{a_n}{2}}$.

Q9. D'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{2} + b_{n+1}$. Or, $b_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$.
On a ainsi

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_n}{2}$$

La suite (a_n) est donc une suite linéaire récurrente d'ordre 2. Son équation caractéristique est $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$ ou encore $2r^2 - r - 1 = 0$.
Son discriminant est $\Delta = 1 + 8 = 9$. Ses racines sont alors

$$r_1 = \frac{1-3}{4} = \frac{-1}{2} \qquad \text{et} \qquad r_1 = \frac{1+3}{4} = 1$$

On a ainsi l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \alpha \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \beta$$

Il reste à déterminer les valeurs de α et β à partir du rang $n = 0$ et $n = 1$:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha + \beta = 0 \\ a_1 = \beta - \frac{\alpha}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\beta = \frac{-2}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n}$$

et, puisque $b_n = \frac{a_{n-1}}{2}$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}}$$

Q10. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n = 0$ car $\left|\dfrac{-1}{2}\right| < 1$.
On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{2}{3} \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{1}{3}}$.

Problème 2.

Partie I - Préliminaires

Q11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+2}e^{-t^2} = 0$.

Ceci montre que $\boxed{t^n e^{-t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}$.

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\ dt$ n'est impropre qu'en $+\infty$.
Or, pour tout $t \geqslant 0$, on a $t^n e^{-t^2} \geqslant 0$ et la question précédente affirme que $t^n e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
De plus, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ converge (intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$).
Le théorème de comparaison donne donc la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2}\ dt$.

Conclusion, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\ dt \text{ converge.}}$

Q13. L'intégrale demandée est impropre en $+\infty$ et en $-\infty$.
La question précédente résout le problème en $+\infty$. Il reste à gérer le problème en $-\infty$.
Pour cela on va procéder au changement de variable : $u = -t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t^n e^{-t^2}\ dt$.
On a donc $du = -dt$ et quand $t \to 0$, $u \to 0$ et quand $t \to -\infty$, $u \to +\infty$. Ainsi

$$\int_{-\infty}^0 t^n e^{-t^2}\ dt = \int_{+\infty}^0 (-1)^n u^n e^{-u^2}\ (-du) = (-1)^n \int_0^{+\infty} u^n e^{-u^2}\ du$$

On retombe sur la première intégrale. Puisqu'elle est convergente, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t^n e^{-t^2}\ dt$ converge également.

La relation de Chasles donne alors la $\boxed{\text{convergence de } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\ dt}$.

Q14. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. P s'écrit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_n X^k$.
La linéarité de l'intégrale donne alors que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2}\ dt = \sum_{k=0}^n a_n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\ dt$$

Puisque toutes les intégrales du membre de droite convergent, on en déduit que

$\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2}\ dt \text{ converge.}}$

Q15. On remarque que $t^{n+2}e^{-t^2} = t^{n+1} \times te^{-t^2}$.

Soient $x < y$ des réels. On procède à une intégration par parties : $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = \frac{-1}{2}e^{-t^2}$. Alors $u'(t) = (n+1)t^n$ et $v'(t) = te^{-t^2}$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_x^y t^{n+2}e^{-t^2}\,dt &= \Big[\frac{-t^{n+1}}{2}e^{-t^2}\Big]_x^y + \int_x^y \frac{n+1}{2}t^n e^{-t^2}\,dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{2}e^{-x^2} - \frac{y^{n+1}}{2}e^{-y^2} + \frac{n+1}{2}\int_x^y t^n e^{-t^2}\,dt\end{aligned}$$

Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{n+1}e^{-x^2} = 0$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} y^{n+1}e^{-y^2} = 0$.

En passant aux limites dans l'égalité précédente, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2}e^{-t^2}\,dt = 0 + \frac{n+1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$$

c'est-à-dire $\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n}$.

Q16. On a montré à la question Q13. que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \int_{-\infty}^{0} t^k e^{-t^2}\,dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2}\,dt$$

On en déduit que pour $k = 2p+1$, on a

$$\begin{aligned}I_{2p+1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1}e^{-t^2}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} t^{2p+1}e^{-t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} t^{2p+1}e^{-t^2}\,dt \\ &= -\int_0^{+\infty} t^{2p+1}e^{-t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} t^{2p+1}e^{-t^2}\,dt \\ &= 0\end{aligned}$$

$\boxed{I_{2p+1} = 0}$

Q17. Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$.

Initialisation : D'après l'énoncé, $I_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

Or, $\dfrac{(0)!}{2^0.0!}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$.

La formule est donc juste pour $p = 0$.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que la formule est vraie pour p. On veut montrer qu'elle est encore vraie pour $p+1$.

D'après la question Q15., on a

$$\begin{aligned} I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2} I_{2p} \\ &= \frac{2p+1}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p} p!}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2p+2)!}{(2p+2).2^{2p+1}.p!}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

La récurrence est donc établie et donc

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!}\sqrt{\pi}}$$

Partie II - Intégrale dépendant d'un paramètre

Q18. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Les fonctions $t \mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$ et $t \mapsto t\cos(xt)e^{-t^2}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ donc les intégrales $S(x)$ et $C(x)$ sont impropres en $+\infty$.
Pour tout $t \geqslant 0$, on a $\left|\sin(xt)e^{-t^2}\right| \leqslant e^{-t^2}$ et $\left|t\cos(xt)e^{-t^2}\right| \leqslant te^{-t^2}$. Ces fonctions sont positives et, d'après la question Q12., on sait que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\ dt$ convergent.
Le théorème de comparaison appliqué à chaque fonction donne alors la convergence absolue de $S(x)$ et $C(x)$. Les intégrales $S(x)$ et $C(x)$ convergent donc.

Q19. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle fermé I. Soient $a, b \in I$, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt$$

Q20. On applique le théorème précédent à la fonction sinus entre a et $b = a+\lambda$ et pour $n = 1$ ($\sin' = \cos$ et $\sin'' = -\sin$) :

$$\sin(a+\lambda) = \sin(a) + \lambda\cos(a) + \int_a^{a+\lambda} (a+\lambda-t)(-\sin(t))\ dt$$

On en déduit que

$$\left|\sin(a+\lambda) - \sin(a) - \lambda\cos(a)\right| = \left|\int_a^{a+\lambda} (a+\lambda-t)\sin(t)\ dt\right|$$

Ici, on doit faire deux cas :

1er cas : $\lambda < 0$.

Dans ce cas, $a+\lambda < a$ et $t \in [a+\lambda, a]$. Alors, $a+\lambda-t \leqslant 0$. On peut alors majorer l'intégrale :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{a+\lambda}(a+\lambda-t)\sin(t)\ dt\right| &\leqslant \int_{a+\lambda}^{a}|a+\lambda-t|\ dt\\ &\leqslant \int_{a+\lambda}^{a}-(a+\lambda-t)\ dt\\ &\leqslant \Big[-(a+\lambda)t+\frac{1}{2}t^2\Big]_{a+\lambda}^{a}\\ &\leqslant -a(a+\lambda)+\frac{1}{2}a^2+(a+\lambda)^2-\frac{(a+\lambda)^2}{2}=\frac{\lambda^2}{2}\end{aligned}$$

2ème cas : $\lambda \geqslant 0$.

Dans ce cas, $a \leqslant a+\lambda$ et $t \in [a, a+\lambda]$. Alors, $a+\lambda-t \geqslant 0$. On peut alors majorer l'intégrale :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{a+\lambda}(a+\lambda-t)\sin((t)\ dt\right| &\leqslant \int_{a}^{a+\lambda}|a+\lambda-t|\ dt\\ &\leqslant \int_{a}^{a+\lambda}(a+\lambda-t)\ dt\\ &\leqslant \Big[(a+\lambda)t-\frac{1}{2}t^2\Big]_{a}^{a+\lambda}\\ &\leqslant (a+\lambda)^2-\frac{1}{2}(a+\lambda)^2-a(a+\lambda)+\frac{a^2}{2}=\frac{\lambda^2}{2}\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a bien $\boxed{\big|\sin(\lambda+a)-\sin(a)-\lambda\cos(a)\big| \leqslant \frac{\lambda^2}{2}}$.

Q21. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$. On note

$$Q(x,h,y)=\left|\frac{\displaystyle\int_0^y \sin((x+h)t)e^{-t^2}\ dt-\int_0^y \sin(xt)e^{-t^2}\ dt}{h}-\int_0^y t\cos(xt)e^{-t^2}\ dt\right|$$

En utilisant la linéarité et la positivité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}Q(x,h,y) &= \left|\int_0^y \frac{\sin(xt+ht)-\sin(xt)-ht\cos(xt)}{h}e^{-t^2}\ dt\right|\\ &\leqslant \int_0^y \frac{|\sin(xt+ht)-\sin(xt)-ht\cos(xt)|}{|h|}e^{-t^2}\ dt\end{aligned}$$

On applique alors l'inégalité de la question précédente avec $a = xt$ et $\lambda = ht$. On obtient

$$\begin{aligned}Q(x,h,y) &\leqslant \int_0^y \frac{(ht)^2}{2|h|}e^{-t^2}\ dt\\ &\leqslant |h|\int_0^y \frac{t^2}{2}e^{-t^2}\ dt\end{aligned}$$

Quand on fait tendre y vers $+\infty$ dans le membre de gauche, on obtient

$$\lim_{y\to+\infty} Q(x,h,y) = \left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - C(x)\right|$$

De plus, d'après la question Q12., l'intégrale du membre de droite converge vers une valeur finie quand y tend vers $+\infty$. Notons A cette valeur.
En passant à la limite quand y tend vers $+\infty$, on obtient alors l'inégalité

$$\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - C(x)\right| \leqslant |h| \times A$$

On en conclue que $\lim\limits_{h\to0}\left|\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} - C(x)\right| = 0$

donc que $\boxed{\lim\limits_{h\to0}\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} - C(x) = 0}$.

Q22. La limite de la question précédente est exactement le calcul de la dérivée de S en x. La fonction S est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, \qquad S'(x) = C(x)}$$

Q23. Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé. On voudrait faire une intégration par parties sur $C(x)$ mais c'est une intégrale généralisée. Soit $y>0$, on va précéder sur $\displaystyle\int_0^y t\cos(xt)e^{-t^2}\,dt$:
On pose $u(t)=\cos(xt)$ et $v(t)=\frac{-1}{2}e^{-t^2}$. On a $u'(t)=-x\sin(xt)$ et $v'(t)=te^{-t^2}$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^y t\cos(xt)e^{-t^2}\,dt &= \Big[\frac{-1}{2}\cos(xt)e^{-t^2}\Big]_0^y - \int_0^y \frac{-x}{2}\sin(xt)e^{-t^2}\,dt\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(xy)e^{-y^2} - \frac{x}{2}\int_0^y \sin(xt)e^{-t^2}\,dt\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{y\to+\infty} e^{-y^2} = 0$ donc $\lim\limits_{y\to+\infty}\cos(xy)e^{-y^2} = 0$.
De plus, $\lim\limits_{y\to+\infty}\displaystyle\int_0^y \sin(xt)e^{-t^2}\,dt = S(x)$, donc en passant à la limite quand $y\to+\infty$, on obtient

$$\boxed{C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)}$$

Q24. D'après les questions Q22. et Q23., pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $S'(x)=C(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}S(x)$.
La fonction S est donc une solution de l'équation différentielle $2y'(x) = 1-xy(x)$.

Q25. L'équation différentielle $2y' = 1-xy$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre. Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme alors qu'il existe une unique solution à cette équation qui vérifie $y(0)=0$.
D'une part, on a déjà vu que S est solution de l'équation différentielle et on remarque que $S(0)=0$.

D'autre part, on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x^2/4}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/4}\,dt$.

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus on constate (en utilisant la formule de dérivation d'un produit) que

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-x}{2}e^{-x^2/4}\int_0^x e^{-t^2/4}\,dt + \frac{1}{2}e^{-x^2/4} \times e^{x^2/4} = \frac{-x}{2}f(x) + \frac{1}{2}$$

Ainsi, f est une solution de $2y' = 1 - xy$. De plus, $f(0) = \frac{1}{2} \times 1 \times 0 = 0$.
les fonctions f et S sont donc deux solutions de l'équation différentielle vérifiant la même condition initiale. Il s'agit donc de la même fonction. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad S(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{-x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt.}$$