Chapitre : 5.2. Électrostatique

Partie : 5 Electromagnétisme

Mise en contexte

(a)



(b)



(a) Photographie d'un éclair tombant sur le paratonnerre de la tour Eiffel. (b) Photographie d'une soudure à l'arc électrique.

L'électromagnétisme est l'étude de deux familles de phénomènes, ceux reliés au champ magnétique étudié précédemment et ceux reliés au champ électrique. Après avoir étudié la magnétostatique nous allons compléter notre étude par l'électrostatique.

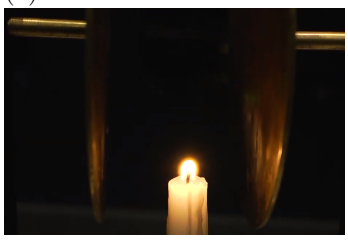
Un exemple naturel de phénomène électrique est l'apparition d'éclair par temps d'orage et un exemple d'exploitation de ces phénomènes est la soudure à l'aide d'arc électrique.

Ces phénomènes provenant de la présence de charges électriques sont expliqués ou contrôlés en décrivant le lien entre charges et le champ électrique qu'elles créés. Notre objectif dans ce chapitre sera donc de définir puis de décrire le champ électrique créé par un objet chargé électriquement.

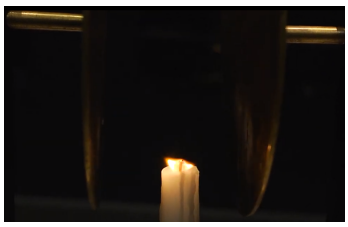
1 Liens entre interaction et champ électrostatique

1.1 Loi de Coulomb

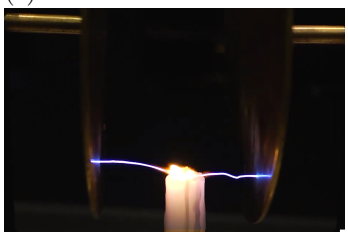
(a)



(b)



(c)

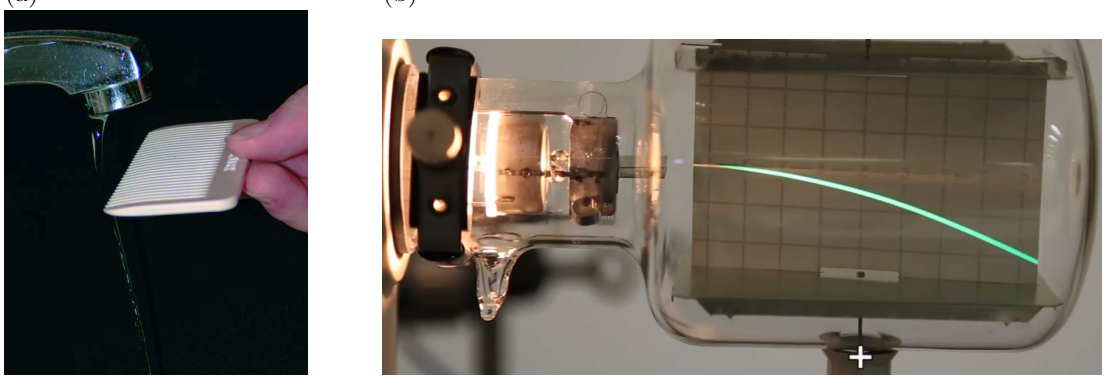


(d)



(a) Photographie d'une bougie entre deux plaques non chargées. (b) La mise sous tension des deux plaques déforme la forme de la flamme de la bougie. (c) A partir d'une tension suffisamment élevée un arc électrique se forme entre les plaques et la flamme de la bougie. (d) Lorsque la flamme est soufflée les fumées sont aussi attirées par les plaques chargées.

(a) (b)



(a) Un peigne chargé par frottement dévie un jet d'eau. (b) Un faisceau d'électron émis par un filament chaud est accéléré en passant au centre d'électrodes circulaires puis dévié par deux électrodes planes verticales.

Remarques 1 *Quelles interactions électrostatiques permettent d'expliquer les phénomènes ci-dessus ?*

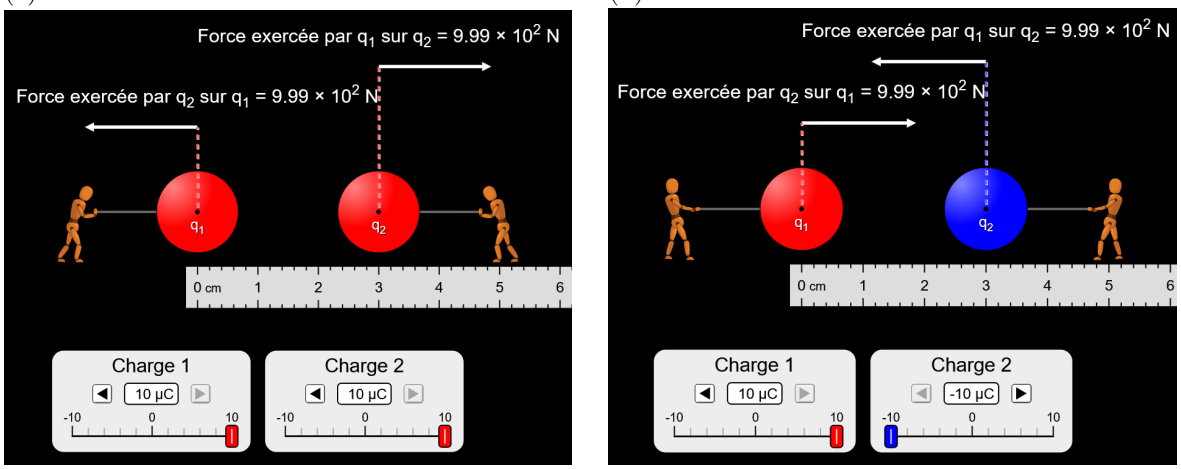
Définition 1 *Loi de Coulomb*

Soit deux particules aux positions P et M, de charges q_P et q_M, qui sont fixes et dans le vide, la loi de Coulomb énonce que la charge q_P en P exerce une force $\vec{F}_{P\to M}$ sur la charge q_M en M telle que :

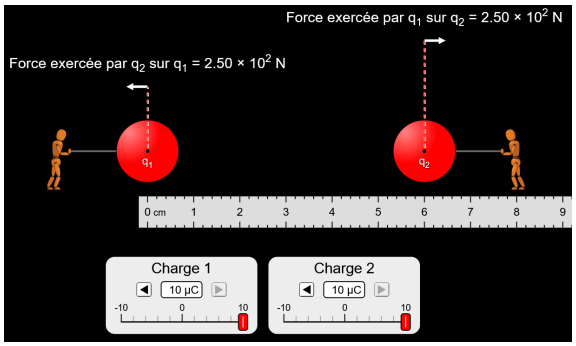
$$\vec{F}_{P\to M} = \frac{q_P q_M}{4\pi\epsilon_0 PM^2}\vec{u}_{P\to M}$$

avec $\vec{u}_{P\to M}$ le vecteur unitaire de P vers M et $\epsilon_0 = 8,8.10^{-12}$ F.m^{-1} la permittivité diélectrique du vide.

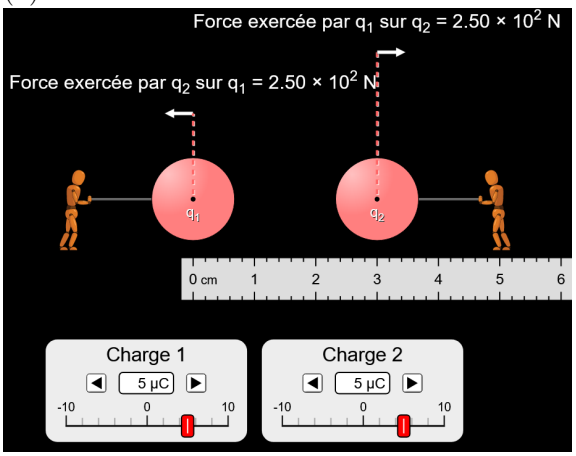
(a) (b)



(c)



(d)



Entre deux particules chargées il s'exerce une force donnée selon la loi de Coulomb. (a) Répulsive pour des charges de même signe. (b) Attractive pour des charges opposées (c) Divisée par 4 si la distance qui les sépare est multiplié par 2. (d) Proportionnelle à la valeur de chaque charges.

Remarques 2 *Dans quel cas la force électrostatique est-elle attractive ou répulsive ? Au vu de la valeur de ϵ_0 à quelle échelle retrouve-t-on cette force ? Comment évolue cette force avec la distance entre charge et la valeur des charges ?*

Applications 1 *Loi de Coulomb*

Quel est la nature et la force qui s'exerce entre :

Q1. deux protons dans le noyau d'un atome ?

Q2. entre le noyau et l'électron de l'atome d'hydrogène ?

Q3. entre cation Na^+ et Cl^- dans le sel solide dont le paramètre de maille est $a = 500$ pm ?

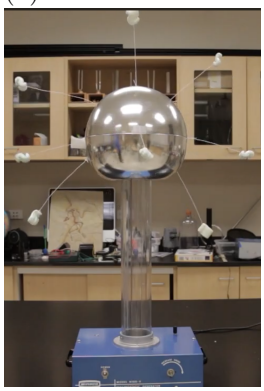
Q4. Quelle charge doit-on avoir sur deux objets macroscopique pour qu'une force de 0,01 N s'exerce à 1 m ?

1.2 Champ électrostatique

(a)

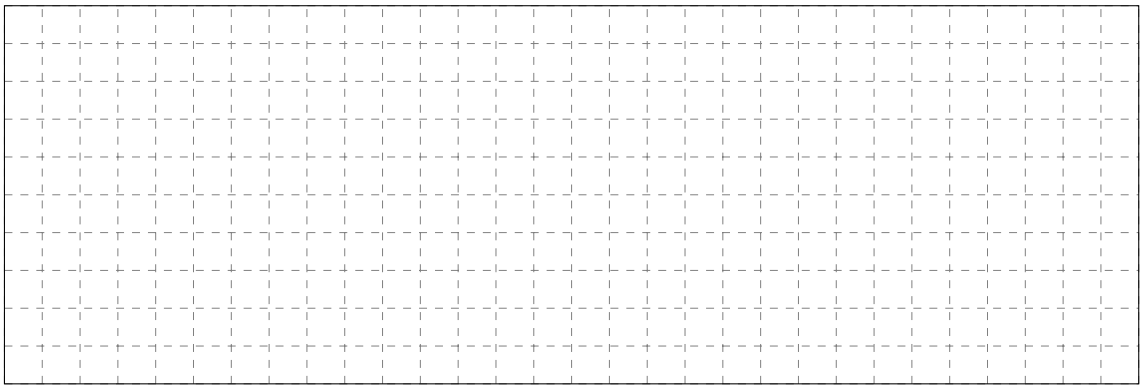


(b)



(a) Une paille chargée attire les charges présentes dans deux feuilles métalliques. Les feuilles alors chargées se repoussent. (b) Dans un générateur de Van Graaf, une courroie charge par frottement une boule métallique. Les éléments disposés sur cette boule partagent la même charge par contact et suivent le champ électrostatique.

Remarques 3 *Sur les exemples précédents quels sont les objets chargés sources qui exercent une force sur des charges sondes ? Justifier alors qu'on définisse un champ électrique qui existe même en l'absence de charge sonde.*



Définition 2 *Distribution discrète de charge*

Soit plusieurs charges q_{P_1}, q_{P_2}, ... q_{P_N} aux positions P_1, P_2, ... P_N fixes,
on appelle distribution discrète de charges, noté $\mathcal{D}$, l'ensemble des particules chargées :

$$\mathcal{D} = \{q_{P_i} \text{ au point } P_i\}$$

Définition 3 *Champ électrostatique*

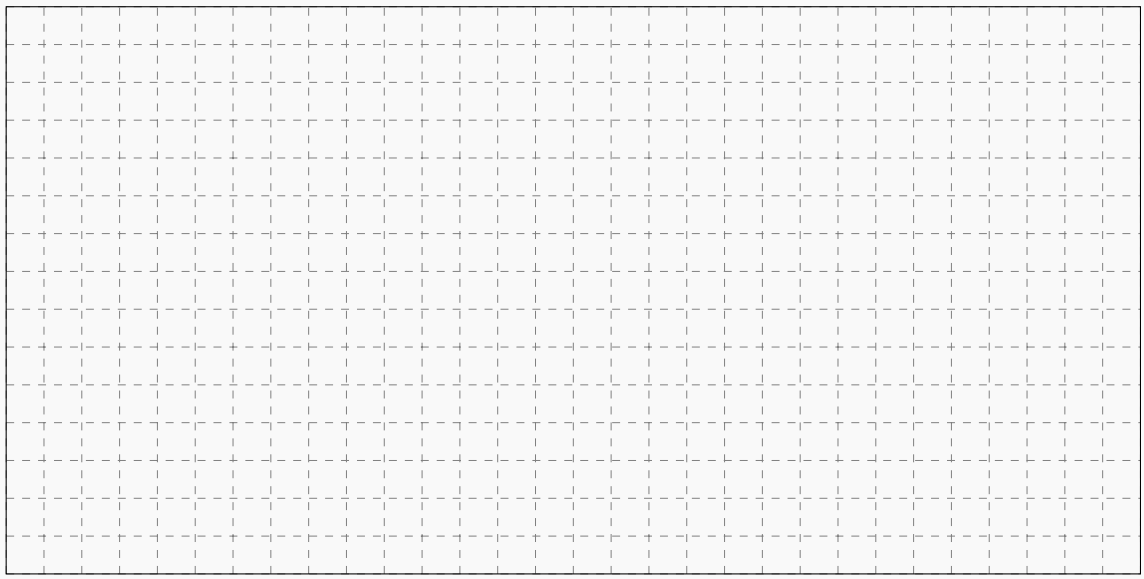
Le champ électrostatique, noté $\vec{E}_{\mathcal{D}}(M)$, créé par la distribution discrète de charge $\mathcal{D}$ est le champ vectoriel tel que pour toutes charges q_M à un point M quelconque, la résultante des forces électrostatiques subies par q_M est :

$$\vec{F}_{\mathcal{D}\to M} = q_M \vec{E}_{\mathcal{D}}(M)$$

Le champ électrostatique s'exprime en $\mathrm{V.m^{-1}}$.

Propriétés 1 *Expression du champ électrostatique créé par des charges ponctuelles*

- Le champ créé par une charge ponctuelle q_P en P s'exprime comme : $\vec{E}_{q_P}(M) = \dfrac{q_P}{4\pi\epsilon_0 PM^2}\vec{u}_{PM} = \dfrac{q_P}{4\pi\epsilon_0} \times \dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$ ce qui peut aussi s'exprimer en coordonnées sphériques de centre P par $\vec{E}_{q_P}(M) = \dfrac{q_P}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$
- Pour une distribution discrète de charge on peut par principe de superposition exprimer le champ résultant comme la somme des champ créé par chaque charges individuelle : $\vec{E}_{\mathcal{D}}(M) = \sum_i \vec{E}_{q_{P_i}}(M)$

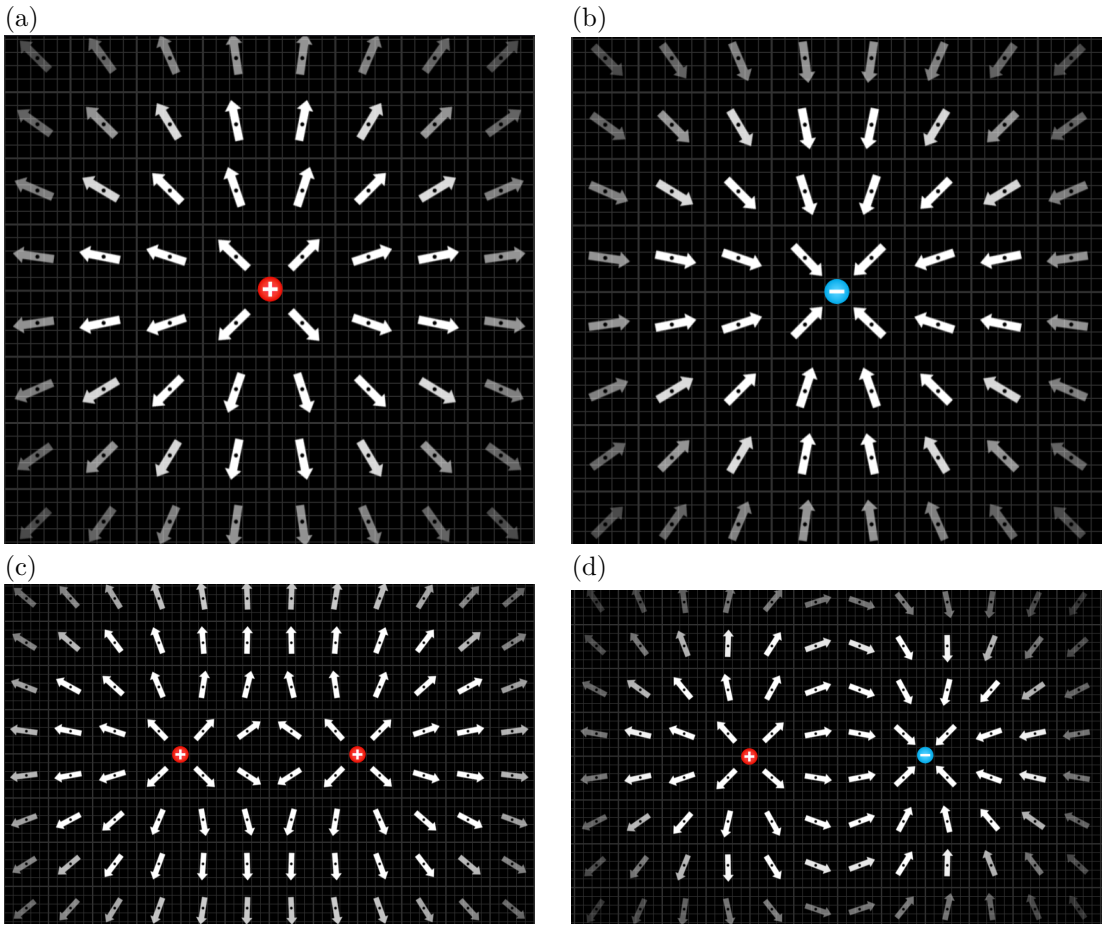


Applications 2 *Champ électrostatique*

Q1. Calculer les ordres de grandeurs des champs électrostatiques :

(a) au sein d'un noyau atomique ($q \sim e$ et $F \sim 10^2$ N)
(b) au sein d'un atome ($q \sim e$ et $F \sim 10^{-8}$ N)
(c) au sein d'un cristal ($q \sim e$ et $F \sim 10^{-10}$ N)
(d) entre objet macroscopique ($q \sim 1$ μC et $F \sim 0,01$ N)

Q2. Tracez les cartes de champ $\vec{E}$ des distributions suivantes :



Représentation de la direction du champ électrique par des vecteurs et de son intensité par leur niveau de gris : (a) pour une charge positive (b) pour une charge négative (c) pour deux charges positives (d) pour deux charges de signes opposées.

1.3 Potentiel électrostatique

Remarques 4 *Quel est la signification de l'adjectif "conservatif" de la force donnée par la loi de Coulomb ?*

Définition 4 *Énergie potentielle électrostatique*

Soit deux particules aux positions P et M, de charges q_P et q_M, qui sont fixes et dans le vide, l'énergie potentielle de la charge q_M en présence de q_P s'écrit à une constante près :

$$E_{p_{P\to M}}(M) = \frac{q_M q_P}{4\pi\epsilon_0 PM} + \text{cte}$$

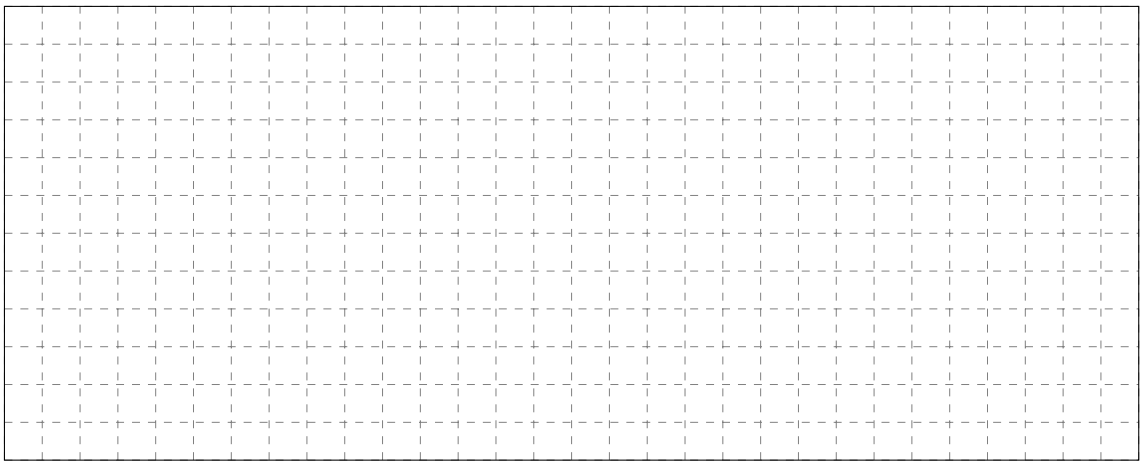
Définition 5 *Potentiel électrostatique*

Le potentiel électrostatique, noté $V_{\mathcal{D}}(M)$, créé par la distribution discrète de charge $\mathcal{D}$ est le champ scalaire tel que pour toute charge q_M à un point M quelconque, l'énergie potentielle de q_M est :

$$E_{p_{\mathcal{D}\to M}}(M) = q_M \times V_{\mathcal{D}}(M)$$

Le potentiel électrostatique $V_{\mathcal{D}}(M)$ s'exprime en V.

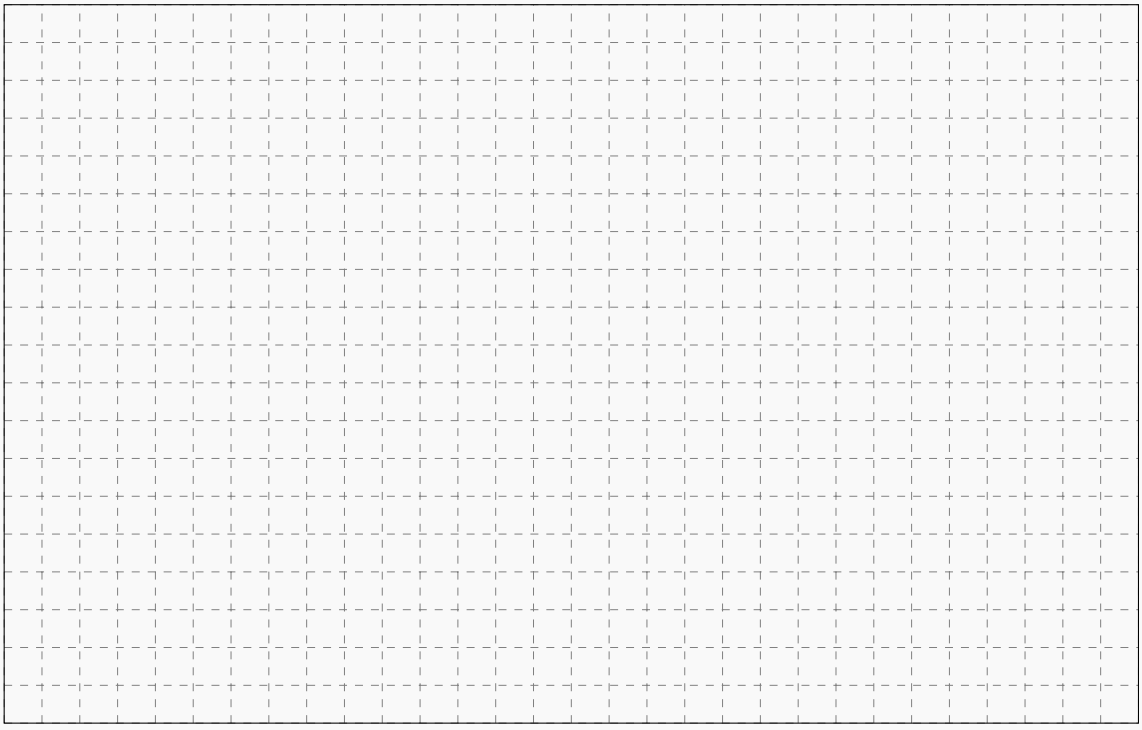
Remarques 5 *Quelles sont les charges sources du potentiel électrostatique $\mathcal{D}$? Quelles charges sont utiles pour définir l'énergie potentielle ? Et le potentiel ? Justifier que l'électron-Volt (eV) soit une unité d'énergie ? Pourquoi le potentiel est défini à une constante près ? Pourquoi qualifie-t-on de champ scalaire un potentiel électrostatique ?*



Propriétés 2 *Expression du potentiel électrostatique créé par des charges ponctuelles*

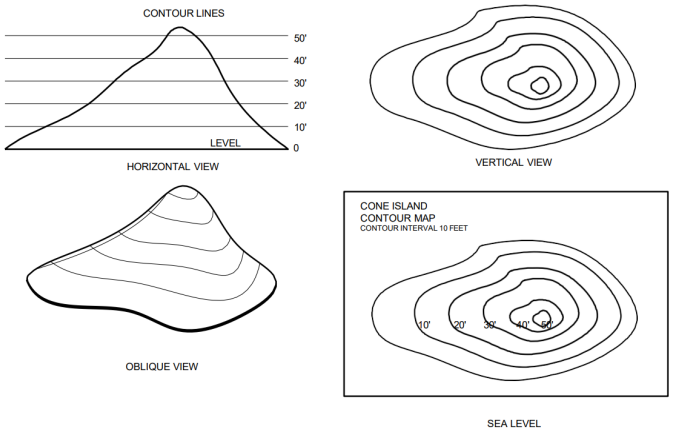
- Le potentiel électrostatique créé par une charge q_P en P s'exprime à une constante près comme : $V_{q_P}(M) = \dfrac{q_P}{4\pi\epsilon_0 PM} + \text{cte}$

  En coordonnée sphérique de centre P il s'exprime $V_{q_P}(M) = \dfrac{q_P}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cte}$
- Le potentiel électrostatique créé par une distribution discrète de charge peut s'écrire par principe de superposition comme la somme des potentiel électrostatique de chaque charge individuelle : $V_{\mathcal{D}}(M) = \sum_i V_{q_{P_i}}(M)$



(a) (b)





(a) Photographie de rizières en escalier. (b) Schéma de tracé de lignes de niveau.

Remarques 6 *Que représente les lignes de niveau sur une carte ? Pourquoi permettent-elles de représenter un champ scalaire ?*

Définition 6 *Surface équipotentielle*

On appelle surface équipotentielle, l'ensemble des points M où $V(M) = V_0$ avec V_0 une constante. Lorsque V_0 change de valeur, on change de surface équipotentielle.

Remarques 7 *Quelles sont les analogies et les différences entre les lignes de niveau sur une carte et les surfaces équipotentielles ? Comment appelle-t-on la surface équipotentielle où la constante est nulle $V_0 = 0$ V ?*

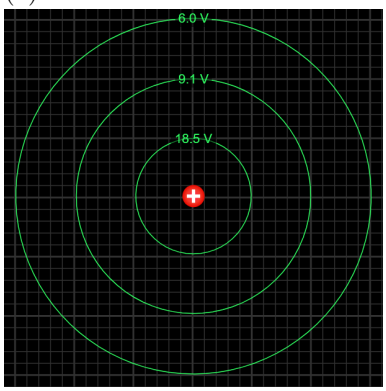
Applications 3 *Potentiel électrostatique*

Q1. En prenant la masse à l'infini $V(r \to +\infty) = 0$ V, calculez l'ordre de grandeur du potentiel électrostatique pour :

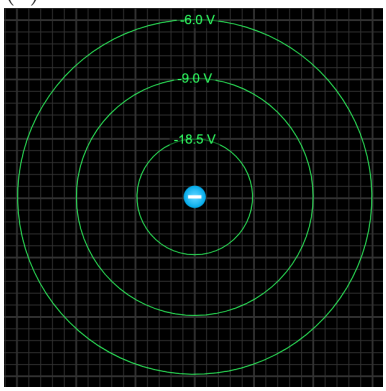
(a) un noyau atomique de 1 fm
(b) un atome d'hydrogène d'énergie d'ionisation $E_I = -13,6$ eV
(c) dans un cristal de sel NaCl où les charges sont supposées 10× plus espacées qu'un atome
(d) à 1 m d'une balle chargée à 1 μC

Q2. Tracez les surfaces équipotentielles en coupe des distributions : un charge $+e$; une charge $-e$; deux charges $+e$; une charge $+e$ et une charge $-e$

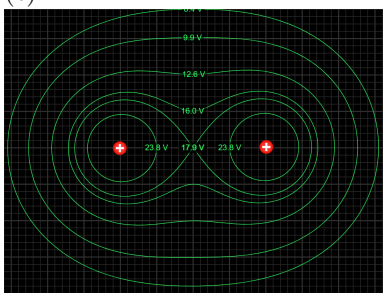
(a)



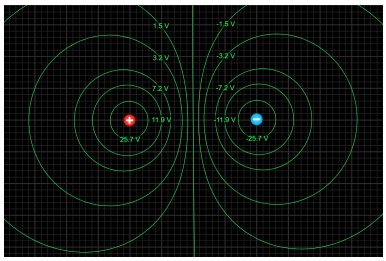
(b)



(c)



(d)



Représentation des surfaces équipotentielles électrique en coupe dans un plan : (a) pour une charge positive (b) pour une charge négative (c) pour deux charges positives (d) pour deux charges de signes opposées.

1.4 Relation entre champ et potentiel électrostatique

Définition 7 *Circulation du champ électrostatique*

Soit une distribution $\mathcal{D}$ engendrant un champ électrostatique $\vec{E}$
On appelle circulation du champ électrostatique de A à B l'intégrale sur un chemin les reliant :

$$\mathcal{C}_{A\to B}(\vec{E}) = \int_{A\to B} \vec{E}_{\mathcal{D}}(M).\overrightarrow{dl}$$

Propriétés 3 *Liens entre circulation du champ et différence de potentiel électrostatique*

- La circulation du champ électrostatique $\vec{E}_{\mathcal{D}}(M)$ sur un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ est relié à la variation infinitésimale de potentiel électrostatique par : $\mathrm{d}V_{\mathcal{D}} = -\vec{E}_{\mathcal{D}}(M).\overrightarrow{dl}$.
- La circulation du champ électrostatique entre deux points A et B est relié à la tension (ou différence de potentiel) u_{AB} par : $u_{AB} = V_{\mathcal{D}}(B) - V_{\mathcal{D}}(A) = -\int_{A\to B} \vec{E}_{\mathcal{D}}(M).\overrightarrow{dl} = -\mathcal{C}_{A\to B}(\vec{E})$
- Pour un contour fermé : $\oint \vec{E}_{\mathcal{D}}(M).\overrightarrow{dl} = -\mathcal{C}_{A\to A}(\vec{E}) = V_{\mathcal{D}}(A) - V_{\mathcal{D}}(A) = 0$

Propriétés 3 *Liens entre circulation du champ et différence de potentiel électrostatique (suite)*

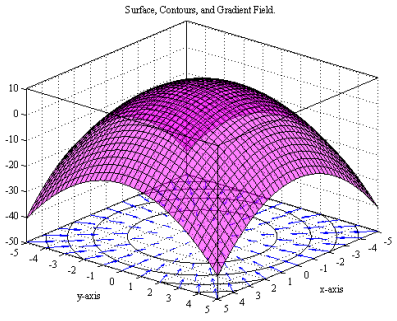
Remarques 8 *Pourquoi qualifie-t-on la circulation du champ électrostatique de "conservative" ?*

Définition 8 *Le gradient*

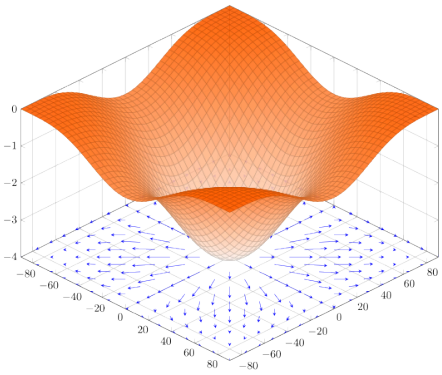
Le gradient : $\overrightarrow{\text{grad}}(.)$ est un opérateur d'analyse vectorielle qui associe un champ vectoriel $\overrightarrow{\text{grad}}(s)(M)$ à un champ scalaire $s(M)$ tel que :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(s)(M) = \frac{\partial s}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial s}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial s}{\partial z}\vec{e}_z$$

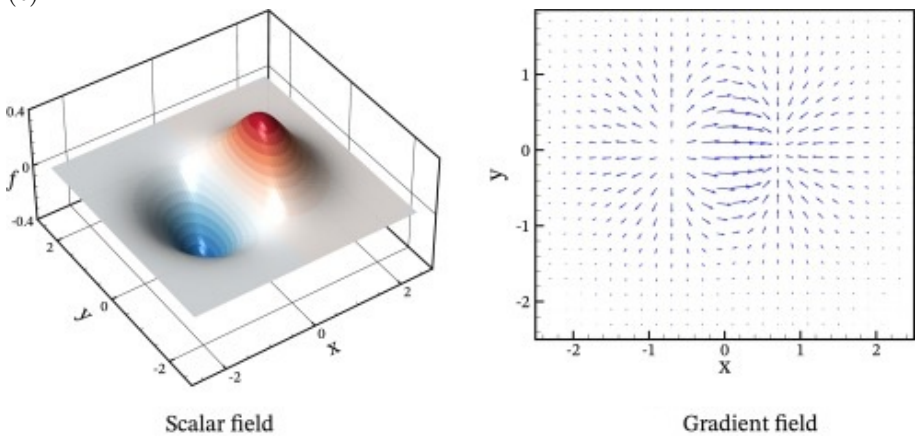
(a)



(b)



(c)



(a) Tracé d'une surface présentant un maximum et du gradient associé. (b) Tracé d'une surface présentant un minimum et du gradient associé. (c) Correspondance entre un champ scalaire et son gradient.

Propriétés 4 *Interprétation géométrique du gradient*

- La variation infinitésimale ds du champ scalaire s selon le déplacement élémentaire $\vec{dl}$ s'exprime en fonction du gradient comme d$s = \overrightarrow{\text{grad}}(s).\vec{dl}$
- Si le déplacement $\vec{dl}$ est colinéaire au gradient $\overrightarrow{\text{grad}}(s)$, alors la variation d$s$ est maximale. On dit que le gradient indique la plus forte pente.
- Si le déplacement $\vec{dl}$ est perpendiculaire au gradient $\overrightarrow{\text{grad}}(s)$, alors la variation d$s$ est nulle. On dit que les surfaces perpendiculaire au gradient sont à s constant.

Propriétés 5 *Relation locale champ/potentiel*

- Pour tout déplacement élémentaire $\vec{dl}$, d$V_{\mathcal{D}} = -\vec{E}_{\mathcal{D}}(M).\vec{dl}$, donc

$$\vec{E}_{\mathcal{D}}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V_{\mathcal{D}})$$

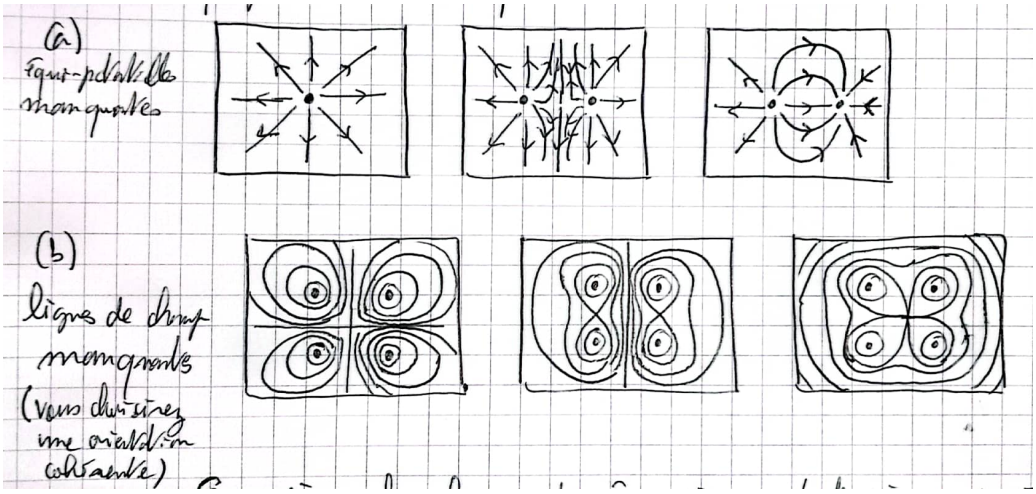
- $\vec{E}_{\mathcal{D}}(M)$ indique la plus forte pente descendante de $V_{\mathcal{D}}(M)$.
- $\vec{E}_{\mathcal{D}}(M)$ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.
- Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

Applications 4 *Relation entre champ et potentiel électrostatique*

Q1. Soit un potentiel $V(x,y,z) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$ calculez le champ $\vec{E}$ correspondant.

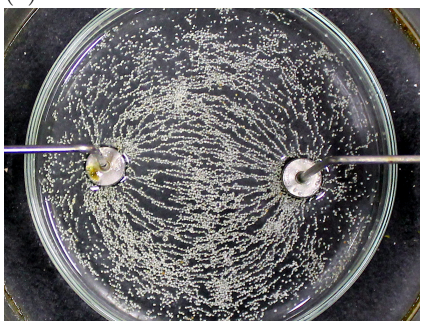
Q2. Soit un champ $\vec{E} = E_0\vec{e}_x$ uniforme, calculez le potentiel V correspondant.

Q3. Complétez les cartes (en 2D) suivantes avec les lignes de champs ou les surfaces équipotentielles manquantes :



2 Champ créé par une distribution continue de charge

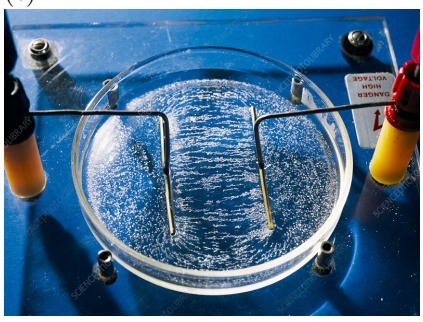
(a)



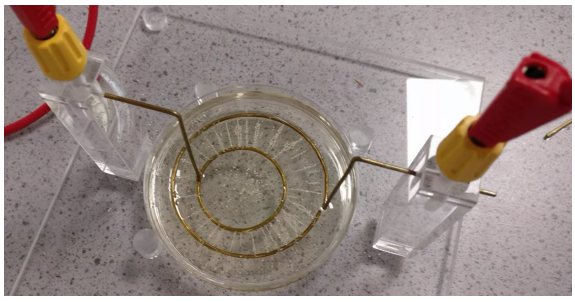
(b)



(c)



(d)



Des graines de semoule disposées à la surface d'un film d'huile se déplacent en suivant le champ électrostatique induit par deux électrodes de charges opposées. (a) Deux électrodes ponctuelles. (b) Une électrode plane et une pointe. (c) Deux électrodes planes. (d) Deux électrodes coaxiales.

Remarques 9 *Estimez le nombre d'électrons dans une armature métallique pour quelle porte une charge de -1µC ? Est-il alors possible de calculer la superposition des champs créés par tous les électrons ? Comment pouvons-nous déterminer le champ créés par les armatures métalliques ?*

2.1 Distribution continue de charge

Définition 9 *Densité volumique de charge*

On définit la densité volumique de charge $\rho(M)$ comme le champ scalaire qui associe à chaque point M d'une distribution $\mathcal{D}$, la charge volumique de l'élément mésoscopique $\mathrm{d}V$ autour de M telle que :

$$\rho(M) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$$

avec $\mathrm{d}q$ la charge de l'élément $\mathrm{d}V$.

Définition 10 *Distribution volumique de charge*

On appelle distribution volumique de charge, $\mathcal{D}$, l'ensemble des densités volumiques de charges $\rho(M)$ en tout point M du volume macroscopique V.

$$\mathcal{D} = \{\rho(M) \text{ tel que } M \in V\}$$

Propriétés 6 *Charge d'une distribution volumique*

- Soit q_{tot} la charge totale de la distribution $\mathcal{D}$, $q_{tot} = \iiint_{M\in V} \mathrm{d}q = \iiint_{M\in V} \rho(M)\mathrm{d}V$
- Si ρ est uniforme sur V alors $q_{tot} = \rho \times V$

Définition 11 *Distribution surfacique de charge*

Si la distribution de charge possède une dimension très petite devant les 2 autres (épaisseur très petite devant largeur et longueur), on définit une distribution surfacique de charge :

$$\mathcal{D} = \{\sigma(M) \text{ tel que } M \in S\}$$

avec $\sigma(M)$ la densité surfacique de charge :

$$\sigma(M) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$$

où $\mathrm{d}q$ est la charge de l'élément de surface $\mathrm{d}S$ de la surface S de la distribution.

Propriétés 7 *Charge d'une distribution surfacique*

- Soit q_{tot} la charge totale de la distribution $\mathcal{D}$, $q_{tot} = \iint_{M\in S} \mathrm{d}q = \iint_{M\in S} \sigma(M)\mathrm{d}S$
- Si σ est uniforme sur S alors $q_{tot} = \sigma \times S$

Propriétés 7 *Charge d'une distribution surfacique (suite)*

Remarques 10 *Comment pouvons-nous relier une densité volumique et surfacique de charge ?*

Définition 12 *Distribution linéique de charge*

Si la distribution de charge possède une dimension très grande devant les 2 autres (longueur très grande devant les côtés de la section), on définit une distribution linéique de charge :

$$\mathcal{D} = \{\lambda(M) \text{ tel que } M \in l\}$$

avec $\lambda(M)$ la densité linéique de charge :

$$\lambda(M) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$$

où $\mathrm{d}q$ est la charge de l'élément de longueur $\mathrm{d}l$ de la ligne l de la distribution.

Propriétés 8 *Charge d'une distribution linéique*

- Soit q_{tot} la charge totale de la distribution $\mathcal{D}$, $q_{tot} = \int_{M\in l} \mathrm{d}q = \int_{M\in l} \lambda(M)\mathrm{d}l$
- Si λ est uniforme sur l alors $q_{tot} = \lambda \times l$

Remarques 11 *Comment pouvons nous relier une densité linéique et volumique de charge ?*

2.2 Exploitations des symétries et invariances

Propriétés 9 *Principes de Curie (symétries)*

- Si P_1 est un plan de symétrie de la distribution de charge $\rho(M)$, alors P_1 est un plan de symétrie du champ électrostatique.
- Si P_2 est un plan d'antisymétrie de la distribution de charge $\rho(M)$, alors P_2 est un plan d'antisymétrie du champ électrostatique.
- Si $M \in \Pi$, un plan de symétrie de la distribution de charge, alors $\vec{E}(M)$ // Π.
- Si $M \in \Pi^*$, un plan d'antisymétrie de la distribution de charge, alors $\vec{E}(M) \perp \Pi^*$.

Remarques 12 *Comment s'illustre les propriétés de symétries pour deux charges ponctuelles identiques, puis opposées ?*

Applications 5 *Exploitation des symétries*

En étudiant les propriétés de symétrie déterminez la direction en tout point M du champ $\vec{E}(M)$ pour :

Q1. une boule uniformément chargée

Q2. un cylindre infini uniformément chargé

Q3. un plan infini uniformément chargé en surface.

Propriétés 10 *Principes de Curie (invariances)*

- Si une distribution de charge est invariante par translation selon $\vec{u}$, alors elle est source d'un champ électrostatique invariant par translation selon $\vec{u}$.
- Si une distribution de charge est invariante par rotation d'axe $(O\vec{u})$ et d'angle θ, alors elle est source d'un champ électrostatique invariant par rotation d'axe $(O\vec{u})$ et d'angle θ.
- Dans un système de coordonnées cartésiennes (u, v, w), si la distribution de charge est invariante par translation selon $\vec{e}_u$, alors elle est source d'un champ électrostatique s'écrivant $\vec{E}(M) = E(v, w)\vec{n}$
- Dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, u), si la distribution de charge est invariante par rotation d'axe $(O\vec{e}_u)$ et d'angle θ, alors elle est source d'un champ électrostatique s'écrivant $\vec{E}(M) = E(r, u)\vec{n}$.

Remarques 13 *Comment s'illustre cette propriété pour deux armatures droites infinies face-à-face portant des charges opposées ? Puis comment s'illustre-t-elle si les armatures sont circulaires et concentriques ?*

Applications 6 *Exploitation des invariances*

En étudiant les propriétés d'invariance déterminez les variables de la valeur du champ électrostatique en tout point M pour :

Q1. une boule uniformément chargée avec $\vec{E}(M) = E(r,\theta,\phi)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques,

Q2. un cylindre infini uniformément chargé avec $\vec{E}(M) = E(r,\theta,z)\vec{e}_r$ en coordonnées cylindriques,

Q3. un plan infini uniformément chargé en surface avec $\vec{E}(M) = E(x,y,z)\vec{e}_z$ en coordonnées cartésiennes.

2.3 Théorème de Gauss

Définition 13 *Flux du champ électrostatique*

On définit le flux du champ électrostatique à travers une surface S par l'expression :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \iint_{M\in S} \vec{E}(M).\vec{dS}$$

Propriétés 11 *Théorème de Gauss*

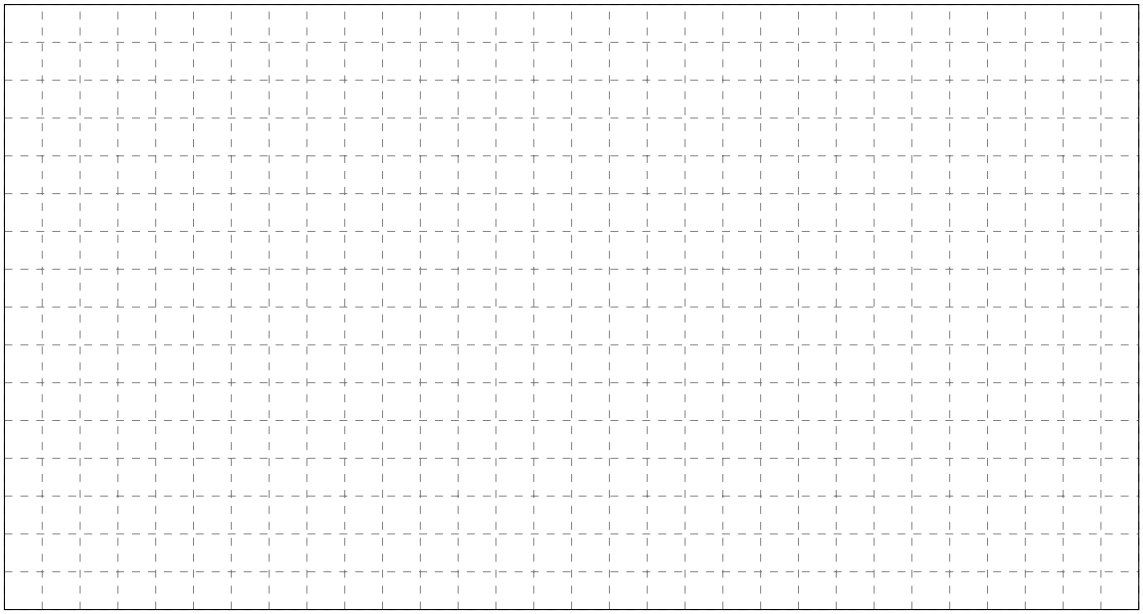
Soit S une surface fermée, le flux sortant du champ électrostatique est donné par :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oiint_{M\in S} \vec{E}.\overrightarrow{dS}^{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

avec $\overrightarrow{dS}^{\text{ext}}$ orienté vers l'extérieur, Q_{int} la charge totale intérieure à S et
$\epsilon_0 = 8,8.10^{-12}$ F.m^{-1} la permittivité diélectrique du vide.

(théorème admis)

Remarques 14 *Faire un schéma qui annote les différents termes intervenant dans le théorème de Gauss. Comment calcule-t-on Q_{int} dans le cas d'une distribution discrète de charge ? Comment calcule-t-on Q_{int} dans le cas d'une distribution continue de charge ? Comment choisir la surface fermée S pour faciliter le calcul de $\Phi_S(\vec{E})$?*



Applications 7 *Théorème de Gauss*

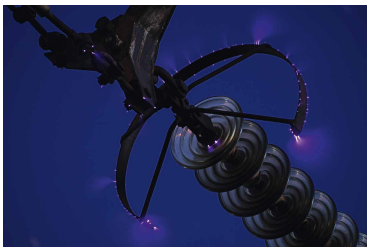
Soit une charge ponctuelle q_P en P. En étudiant les symétries et invariances en coordonnées sphériques (P,r,θ,ϕ) on a $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.

Q1. Choisir la surface fermée S sur laquelle appliquer simplement le théorème de Gauss.

Q2. Appliquez le théorème de Gauss pour déterminez $E(r)$.

3 Modèles et effets macroscopiques

3.1 Effet de pointe



Effet corona autour de l'éclateur d'une ligne à haute tension. Le champ électrique intense ionise l'air et fait apparaître un halo luminescent proche des pointes.

Propriétés 12 *Augmentation du champ électrique avec le ressèrement des lignes de champ*

Soit un tube de champ vide de charges suffisamment étroit pour que le champ électrostatique soit uniforme sur les surfaces aux extrémités, on appelle S_1 et S_2 les surfaces aux extrémités et E_1, E_2 les normes de champ électrique sur ces surfaces, alors :

$$E_1 \times S_1 = E_2 \times S_2$$

on dit que le flux se conserve le long d'un tube de champ et on en déduit que si les lignes de champ se resserrent ($S_2 < S_1$) alors le champ est plus intense ($E_2 > E_1$).

Propriétés 13 *Effet de pointe*

Au voisinage des pointes métalliques le champ électrique est intense.

3.2 Modèles de distributions infinies

Propriétés 14 *Modèle de la boule uniformément chargée*

Soit une boule de centre O de rayon R de densité volumique de charge ρ uniforme,
le champ électrostatique engendrée est donnée en coordonnée sphérique (O, r, θ, ϕ) par :

- $\vec{E}(M) = \dfrac{\rho}{3\epsilon_0} r\vec{e}_r = \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{OM}$ à l'intérieur de la boule soit pour $r \leq R$
- $\vec{E}(M) = \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2}\vec{e}_r = \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$ à l'extérieur de la boule soit pour $r \geq R$

En coordonnées sphériques le gradient s'exprime comme :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$$

le potentiel électrostatique engendrée par la boule est alors donnée en coordonnée sphérique (O, r, θ, ϕ) par :

- $V(M) = \dfrac{\rho}{6\epsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right) + C = \dfrac{\rho}{6\epsilon_0}\left(3R^2 - OM^2\right) + C$ à l'intérieur de la boule soit pour $r \leq R$
- $V(M) = \dfrac{\rho}{3\epsilon_0} \times \dfrac{R^3}{r} + C = \dfrac{\rho}{3\epsilon_0} \times \dfrac{R^3}{OM} + C$ l'extérieur de la boule soit pour $r \geq R$

avec C une constante

Remarques 15 *Que pouvez-vous dire des champs et potentiel à l'extérieur de la boule uniformément chargée ?*

Propriétés 15 *Modèle du cylindre infni uniformément chargée*

Soit un cylindre infini d'axe (Oz) de rayon R de densité volumique de charge ρ uniforme, le champ électrostatique engendrée est donnée en coordonnée cylindrique (O, r, θ, z) par :

- $\vec{E}(M) = \dfrac{\rho}{2\epsilon_0} r\vec{e}_r = \dfrac{\rho}{2\epsilon_0}\overrightarrow{HM}$ à l'intérieur du cylindre soit pour $r \leq R$
- $\vec{E}(M) = \dfrac{\rho}{2\epsilon_0}\dfrac{R^2}{r}\vec{e}_r = \dfrac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{HM}}{HM^2}$ à l'extérieur du cylindre soit pour $r \geq R$

Avec H le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz). En coordonnées cylindrique le gradient s'exprime comme :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

le potentiel électrostatique engendrée par le cylindre est alors donné en coordonnée cylindrique (O, r, θ, z) par :

- $V(M) = -\dfrac{\rho}{4\epsilon_0}r^2 + C = -\dfrac{\rho}{4\epsilon_0}HM^2 + C$ à l'intérieur du cylindre soit pour $r \leq R$
- $V(M) = \dfrac{\rho}{2\epsilon_0}R^2\left(\ln\left(\dfrac{R}{r}\right) - \dfrac{1}{2}\right) + C = \dfrac{\rho}{2\epsilon_0}R^2\left(\ln\left(\dfrac{R}{HM}\right) - \dfrac{1}{2}\right) + C$ l'extérieur du cylindre soit pour $r \geq R$

avec C une constante

Remarques 16 *Que pouvez-vous dire des champs et potentiel à l'extérieur du cylindre infini uniformément chargé ?*

Propriétés 16 *Modèle du plan infni uniformément chargée*

Soit un plan infini horizontal centré sur (Oxy) d'épaisseur e de densité volumique de charge ρ uniforme,
le champ électrostatique engendrée est donnée en coordonnée cartésiennes (O, x, y, z) par :

- $\vec{E}(M) = \dfrac{\rho}{2\epsilon_0} z\vec{e}_z = \dfrac{\rho}{2\epsilon_0}\overrightarrow{HM}$ à l'intérieur du plan soit pour $-\dfrac{e}{2} \leq z \leq \dfrac{e}{2}$
- $\vec{E}(M) = \pm\dfrac{\rho}{2\epsilon_0} e\vec{e}_z$ à l'extérieur du plan soit pour $|z| \geq \dfrac{e}{2}$

Avec H le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy). En coordonnées cartésiennes le gradient s'exprime comme :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

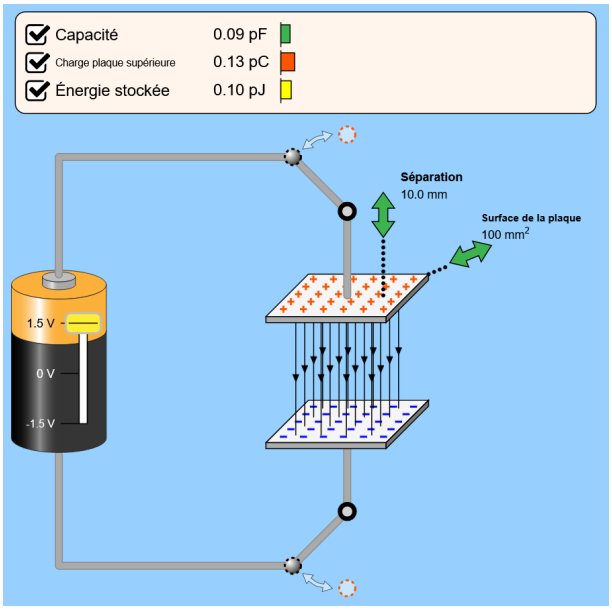
le potentiel électrostatique engendrée par le plan est alors donné en coordonnée cartésienne (O, x, y, z) par :

- $V(M) = -\dfrac{\rho}{4\epsilon_0} z^2 + C = -\dfrac{\rho}{4\epsilon_0} HM^2 + C$ à l'intérieur du plan soit pour $-\dfrac{e}{2} \leq z \leq \dfrac{e}{2}$
- $V(M) = -\dfrac{\rho}{2\epsilon_0} ez + C$ à l'extérieur du plan soit pour $|z| \geq \dfrac{e}{2}$

avec C une constante

Remarques 17 *Que pouvez-vous dire des champs et potentiel à l'extérieur du plan infini uniformément chargé ?*

3.3 Condensateur plan



Représentation schématique de la tension, charge et champ électrique présent dans un condensateur plan.

Propriétés 17 *Modèle du condensateur plan*

Soit un condensateur constitué de deux armatures planes de surface S face-à-face et espacées d'un écartement e. Les armatures portent des charges opposées $+q$ et $-q$.
On se placera dans l'hypothèse de grandes armatures comparé à leur écartement $e^2 \ll S$, tel que l'on pourra négliger les effets de bords et considérer les résultats précédents obtenus pour un plan infini.
Le champ électrostatique engendré par le condensateur plan est donné en coordonnée cartésienne (O, x, y, z) tel que les armatures sont orthogonales à $\vec{e}_z$ et dans le sens de $-q$ à $+q$ selon $\vec{e}_z$ par :

- $\vec{E}(M) = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_z = -\dfrac{q}{\epsilon_0 S}\vec{e}_z$ à l'intérieur du condensateur soit entre les armatures
- $\vec{E}(M) = \vec{0}$ à l'extérieur du condensateur

Le potentiel électrostatique engendré par le plan est donnée par :

- $V(M) = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0} z$ à l'intérieur du condensateur soit entre les armatures
- $V(M) = \pm\dfrac{\sigma e}{2\epsilon_0}$ à l'extérieur du condensateur

La capacité du condensateur plan est alors $C = \dfrac{\epsilon_0 S}{e}$

Propriétés 17 *Modèle du condensateur plan (suite)*

Remarques 18 *Que pouvez-vous dire de l'association en série ou en parallèle de condensateur plan ? Quelle expression obtient-on pour l'énergie stockée dans le condensateur en fonction du champ électrique qu'il créé ?*

Vers les concours

- Relier champ et force électrostatique, relier potentiel et énergie électrostatique, relier champ et potentiel électrostatique.
- Modéliser une distribution de charge : discrète, volumique, surfacique, linéique
- Exploiter les symétries et invariances d'une distribution de charge pour prévoir les propriétés du champ électrique qu'elle engendre
- Prévoir et tracer une carte de champ à partir d'une distribution de charge
- Exploiter la forme d'un tube de champ vide charge
- Suivre une démarche appropriée pour appliquer le théorème de Gauss à des situations présentant un haut degré de symétrie