

Travaux dirigés du chapitre : 1.3. Électronique numérique

Partie : 1 Electronique

1 Critère de Nyquist-Shannon et repliement de spectre

Une tension analogique périodique $e(t)$ est numérisée avec une fréquence d'échantillonnage f_e .

1. Rappeler le critère de Nyquist-Shannon.
2. Les fréquences f_1 et f_2 valent respectivement 1 kHz et 200 Hz, et on note $T_2 = 1/f_2$. Dans chacun des cas suivants, donnez la fréquence minimale d'échantillonnage f_e à appliquer pour que le signal $e_i(t)$ soit correctement échantillonné :
 - (a) $e_1(t) = E \cos(2\pi f_1 t)$
 - (b) $e_2(t) = E \cos(2\pi f_2 t)$
 - (c) $e_3(t) = E \cos(2\pi (f_1 + f_2) t)$
 - (d) $e_4(t) = E (\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t))$
 - (e) $e_5(t) = E \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t)$
 - (f) $e_6(t) = E \cos^2(2\pi f_1 t)$
 - (g) $e_7(t)$ signa créneau de période T_2 dont la série de Fourier s'écrit :

$$e_7(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2\pi(2k-1)f_2 t) \right)$$

3. Dans le cas du signal créneau $e_7(t)$, une fréquence d'échantillonnage de 1,5 kHz a été choisie. Convient-elle ? Quelles sont les fréquences parasites obtenues en dessous de $f_e/2$?
4. Dans ce cas, quelle solution proposez-vous si l'on accepte de perdre les harmoniques dont l'amplitude est inférieure à 5% de celle du fondamental ?

2 Le CD audio

Nous cherchons à enregistrer un concert sur un CD audio, en format non compressé (WAV par exemple) afin de ne pas perdre en qualité. Le son est capté par un microphone (signal analogique), puis filtré par un passe-bas, et enfin échantillonné avec une fréquence f_e . La fréquence d'échantillonnage d'un CD audio est de $f_e = 44100$ Hz, et la quantification est faite sur 16 bits (chaque mesure est codée sur 16 bits).

1. Quelle est la gamme de fréquence audible ? Quelle doit-être alors la fréquence d'échantillonnage minimale pour enregistrer tout le spectre audible ? La fréquence $f_e = 44100$ Hz est-elle compatible ?
2. On choisit tout d'abord de ne pas mettre le filtre passe-bas en amont du CAN. Un son de fréquence $f_1 = 43000$ Hz est présent lors du concert.

- (a) Ce sont est-il audible lors du concert ? Que deviendra-t-il après échantillonnage ? En quoi cela pose problème ?
- (b) Expliquer en quoi l'ajout du filtre passe-bas en amont de l'échantillonneur peut résoudre ce problème. Estimer sa fréquence de coupure.
- (c) Quel autre problème peut apporter à son tour ce filtre ? Pour atténuer ce problème, on augmente l'ordre du filtre, et on effectue un suréchantillonnage (f_e un peu plus élevée que prévu par le critère de Shannon). Expliquer pourquoi.
- (d) On cherche maintenant à calculer la durée d'enregistrement que peut contenir un CD audio enregistrable du commerce, soit 700 Mo.
 - i. Sachant que l'enregistrement s'effectue à $f_e = 44100$ Hz sur 16 bits d'échantillonnage, et que l'on enregistre en stéréo, donc 2 sons (2 signaux), de combien de bits a-t-on besoin pour enregistrer 1 seconde de concert ?
 - ii. Quelle durée de concert peut-on enregistrer sur le CD de 700 Mo ? On rappelle que 1 octet vaut 8 bits.
 - iii. Il est possible de compresser le signal pour l'enregistrer au format MP3. La fréquence d'échantillonnage et la quantification sont inchangées, mais un traitement numérique du signal repère les redondances pour ne les écrire qu'une seule fois, et enlève les signaux peu audibles. Le taux de compression peut aller de 4 à 20. Quelle durée de musique peut-on alors enregistrer sur 700 Mo ?

3 Filtre numérique à moyenne glissante

L'objectif de ce problème est de réaliser un filtre numérique et de comparer ses propriétés avec le filtre analogue.

Pour cela, on réalise un filtre à moyenne glissante. Un signal d'entrée $e(t)$ analogue est échantillonné à la fréquence $f_e = 1000$ Hz. On appelle e_k la valeur de l'échantillon n° k : $e_k = e(t = kT_e)$ avec $T_e = 1/f_e$ la période d'échantillonnage du CAN.

Commençons par étudier un filtre à moyenne glissante sur $n = 4$ échantillons dont le signal de sortie s_k est la moyenne des 4 derniers échantillons de e : $s_k = (e_k + e_{k-1} + e_{k-2} + e_{k-3})/4$.

1. On applique un échelon de tension unitaire en entrée : $e(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $e(t) = 1$ pour $t \geq 0$. Donner les valeurs de s_k obtenues et les représenter graphiquement. En déduire le type de filtre obtenu ainsi que la valeur du gain $G = |H|$ dans sa bande passante. Ce résultat était-il prévisible ?
2. Afin de tracer la courbe de gain $G(f)$ en fonction de la fréquence, on place en entrée un signal sinusoïdal de la forme $e(t) = e_0 \cos(2\pi ft)$ avec $e_0 = 1$ V. On teste successivement les fréquences $f = \frac{f_e}{4}, \frac{f_e}{3}, \frac{f_e}{2}, \frac{2f_e}{3}, \frac{3f_e}{4}$ et f_e .
 - (a) Pour chaque fréquence, remplir un tableau avec les valeurs de e_k pour $0 \leq k \leq 8$ et les valeurs de s_k correspondantes. En déduire l'amplitude du signal sinusoïdal de sortie ainsi que le gain pour chacune des fréquences testées. Reporter ces valeurs sur un diagramme du gain en fonction de la fréquence.
 - (b) Le filtrage des hautes fréquences est-il progressif comme un passe-bas analogue ? Y a-t-il des fréquences rejetées (complètement coupées) ?
 - (c) La fréquence f_e est-elle filtrée comme devrait le faire un passe-bas ? Expliquer en quoi ce résultat était prévisible compte tenu de l'échantillonnage. Quelle précaution prend-on en amont de l'échantillonnage pour éviter ce problème ?

3. Pour affiner le tracé du diagramme de gain, on effectue à l'aide d'une feuille de calcul les mêmes calculs que dans la question précédente pour diverses fréquences. Le tableau reporté ci-dessous a été effectué pour différentes fréquences f et différents k . La formule utilisée pour chaque case est :

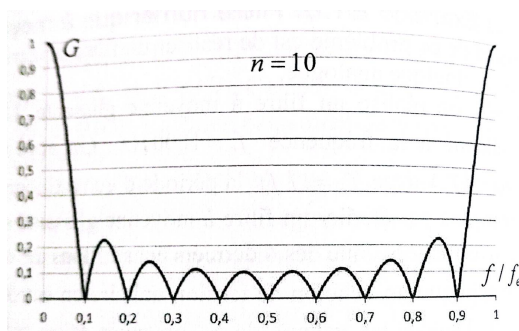
$$s_k = \cos\left(2\pi f \frac{k}{1000}\right) + \cos\left(2\pi f \frac{k-1}{1000}\right) + \cos\left(2\pi f \frac{k-2}{1000}\right) + \cos\left(2\pi f \frac{k-3}{1000}\right)$$

	k=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f=100	0,45	0,73	0,73	0,45	0,00	-0,45	-0,73	-0,73	-0,45	0,00	0,45	0,73	0,73	0,45	0,00
200	-0,08	0,20	0,20	-0,08	-0,25	-0,08	0,20	0,20	-0,08	-0,25	-0,08	0,20	0,20	-0,08	-0,25
300	0,17	-0,11	-0,11	0,17	0,00	-0,17	0,11	0,11	-0,17	0,00	0,17	-0,11	-0,11	0,17	0,00
400	0,20	-0,08	-0,08	0,20	-0,25	0,20	-0,08	-0,08	0,20	-0,25	0,20	-0,08	-0,08	0,20	-0,25

Compléter le diagramme du gain et en déduire son allure.

Estimer la fréquence de coupure à -3dB de ce filtre.

4. Afin de voir si l'on peut généraliser les résultats précédents, le même travail a été effectué avec une moyenne glissante sur $n = 10$ échantillons. Le tracé du gain est :



Estimer à nouveau la fréquence de coupure à -3 dB. Le filtre semble-t-il plus efficace si l'on augmente n ? Expliquer le repliement de G observé. Vérifier par lecture de diagramme que les fréquences rejetées sont les multiples de $f_e/10$.

On admettra que ce résultat se généralise, et que les fréquences rejetées pour une moyenne glissante à n échantillons sont les fréquences multiples de f_e/n à l'exception de f_e .

5. On envisage le cas d'un signal sonore enregistré puis échantillonné. Il est modélisé ici par une sinusoïde pure de fréquence 50 Hz et d'un bruit à 400 Hz venant entacher ce signal. Si le signal est échantillonné à 1000 Hz, montrer qu'il est possible de couper ce bruit par application d'un filtre à moyenne glissante sur 10 échantillons.