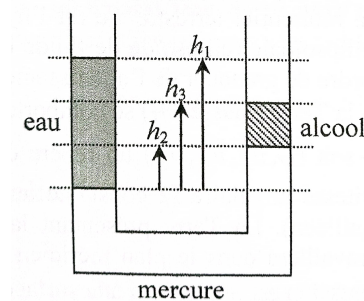


Travaux dirigés du chapitre : 2.1. Éléments de statique des fluides en référentiel Galiléen

Partie : 2. Mécanique des fluides appliquées aux machines thermiques

1 Fluides incompressibles

1.1 Équilibre de trois liquides non miscibles



1. Montrer, à partir de l'équation locale de la statique des fluides, que la pression est une fonction affine de l'altitude z dans un liquide incompressible.
2. Un système de trois liquides incompressibles non miscibles (eau, mercure, alcool) est en équilibre dans un tube en U ouvert à l'air libre. On note respectivement ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 les masses volumiques de l'eau, du mercure et de l'alcool. Calculer ρ_3 en fonction de ρ_1 , ρ_2 , h_1 , h_2 et h_3 .

On donne $h_1 = 0,80$ m, $h_2 = 0,050$ m, $h_3 = 0,20$ m, $\rho_1 = 1,0 \cdot 10^3$ kg.m⁻³ et $\rho_2 = 1,4 \cdot 10^4$ kg.m⁻³

1.2 Liquide en rotation

Soit un cylindre de rayon R et de hauteur H , rempli d'eau liquide de masse volumique ρ jusqu'à une hauteur h_E à l'arrêt, puis en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse constante ω .

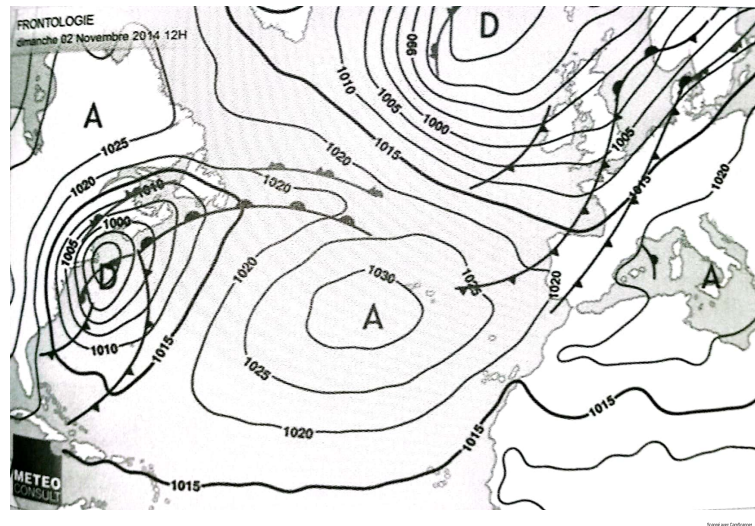
1. Exprimer en coordonnées cylindriques l'accélération d'une particule fluide de masse ρdV dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Projeter le principe fondamental de la dynamique sur des axes pertinents.
2. Montrer que vue en coupe, la surface libre de l'eau est une parabole. Établir son équation.
3. A quelle hauteur z_O se trouve le fond de la surface libre quand le cylindre tourne à ω ?
4. A quelle vitesse minimale ω_1 faut-il tourner pour voir le fond du cylindre sec?
5. A quelle vitesse ω_2 faut-il tourner pour voir le liquide déborder?

2 Fluides compressibles

2.1 Modèles d'atmosphère

L'air de la troposphère (partie de l'atmosphère dans laquelle nous vivons) est considéré comme un gaz parfait de masse molaire M . On suppose le champ de pesanteur uniforme. Au niveau du sol ($z = 0$), la pression est P_0 et la température T_0 . On suppose tout d'abord que la température de l'atmosphère est uniforme.

1. Discuter ces trois hypothèses ; quel en est le domaine de validité ?
2. A partir de la relation fondamentale de la statique des fluides, établir la loi de variation de la pression en fonction de l'altitude z . On introduira une hauteur caractéristique H du phénomène.
3. En déduire le profil de la densité moléculaire $n(z)$ dans l'atmosphère. Commenter.
4. Définir et calculer l'altitude z_G du centre de masse d'une colonne d'air isotherme de température T et de hauteur infinie en équilibre avec le champ de pesanteur uniforme. Quel est l'effet d'une variation de T sur z_G ? Commenter.
5. Pour proposer des prévisions météorologiques, les mesures de pressions sont réalisées par des stations au sol réparties sur tout le globe terrestre. En quelle unité sont exprimées les mesures de la carte météo ci-dessous ? Ces mesures sont corrigées de l'altitude du lieu de mesure ; à quoi ressembleraient sinon les cartes représentant les courbes isobares ?



6. On suppose maintenant que la température de l'air décroît linéairement avec l'altitude z selon la loi $T(z) = T_0 - \lambda z$ (avec $\lambda > 0$).

(a) Montrer que la pression à l'altitude z est de la forme $P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right)^{T_0/(\lambda H)}$

(b) Calculer, dans ce modèle, la pression au sommet de l'Everest (8850 m).

7. Pour $z \ll H$, montrer que les résultats obtenus à l'aide des deux modèles (isotherme et T affine) conduisent à une même fonction affine $P(z)$ donnant la pression en fonction de l'altitude.

On donne : $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$, $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, $P_0 = 1,0 \text{ bar}$, $T_0 = 310 \text{ K}$ et $\lambda = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}^{-1}$

2.2 Évaluation de la masse de l'atmosphère

Dans le modèle de l'atmosphère isotherme à T_0 (273 K), où l'air est considéré comme un gaz parfait ($M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$), l'évolution de la pression avec l'altitude z est donnée par :

$$P(z) = P_0 \exp(-z/H) \text{ avec } P_0 = P(0) = 1,0 \text{ bar et } H = 8,0 \text{ km.}$$

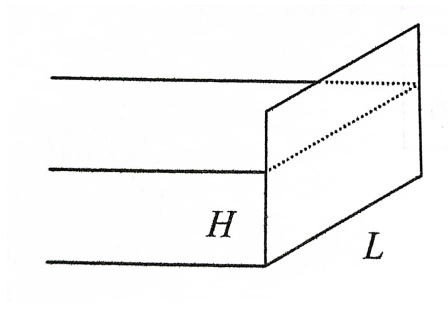
1. Exprimer la masse volumique $\rho(z)$ de l'atmosphère. En déduire la masse dm d'atmosphère dans une "coquille sphérique" comprise entre les rayons $r(= R_T + z)$ et $r + dr$.
2. Pour simplifier, on suppose que l'altitude z est petite devant le rayon R_T de la Terre, et que l'épaisseur de l'atmosphère est grande devant H . En déduire dans le cadre de ces approximations la masse m de l'atmosphère. La calculer. On prendra $R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$.

3 Résultante des forces de pression

3.1 Résultante des forces de pression sur un barrage

3.1.1 Barrage droit

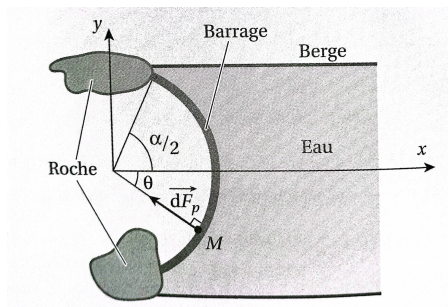
Un barrage est constitué d'une paroi verticale de largeur L . De l'eau, assimilée à un fluide incompressible de masse volumique ρ_0 , s'appuie sur une hauteur H sur une des faces du barrage. La pression atmosphérique P_0 s'exerce sur l'autre face du barrage et sur la surface libre de l'eau. L'axe vertical (Oz) est descendant et le champ de pesanteur est uniforme.



1. Exprimer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le barrage.

3.1.2 Barrage voûté

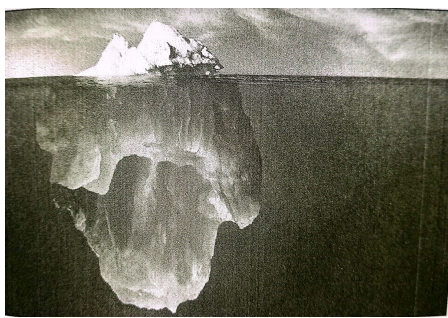
On considère un barrage en forme de portion de cylindre de rayon R , d'axe (Oz) et retenant l'eau d'un lac sur une hauteur H . En coordonnée cylindriques, ce barrage correspond à la partie du cylindre de rayon R balayée par un angle d'ouverture α .



1. Établir le profil vertical de pression exercée par l'eau sur le barrage.
2. En déduire la résultante $\vec{F}$ des forces de pression exercées sur le barrage.

3.2 La partie émergée de l'iceberg

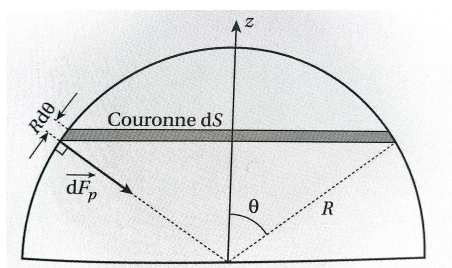
Considérons un iceberg de volume total V flottant sur l'eau. Soit v le volume de la partie émergée.



1. Déterminer le rapport v/V .
On donne les masses volumiques respectives de l'eau, de la glace et de l'air : $\rho_e = 1.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $\rho_g = 0,9.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $\rho_a = 1 \text{ kg.m}^{-3}$.

3.3 Statique des fluides en géométrie sphérique

On plonge un saladier hémisphérique de rayon R et de centre O , renversé vers le bas, dans un bac rempli d'eau de masse volumique ρ jusqu'à une hauteur H .



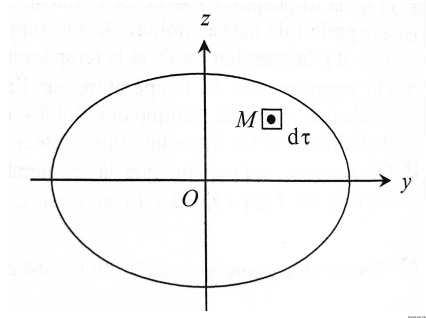
1. Établir la loi de pression $P(z)$ en fonction notamment de la pression atmosphérique P_a .
2. En coordonnées sphériques de centre O , exprimer la force pressante élémentaire $d\vec{F}_p$ exercée par l'eau sur une surface élémentaire correspondant à la calotte sphérique de rayon R délimitée par les ouvertures angulaire $d\theta$ et $d\phi$.
3. En déduire la résultante des forces de pression $\vec{F}_p$ exercée par l'eau sur le saladier. Pourrait-on obtenir ce résultat d'une autre façon ?

4 Problème

4.1 Forme de la Terre

En 1743, Clairaut propose que la Terre se comporte comme une masse fluide en équilibre dans le référentiel terrestre : c'est l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique aboutissant à une Terre ellipsoïdale (ellipsoïde de fluide idéal). Nous adopterons ici un modèle simple pour trouver un ordre de grandeur de l'aplatissement de la Terre :

- la Terre (masse M_T) se comporte comme un corps fluide homogène de masse volumique ρ_0 ;
- soit $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ un repère du référentiel $\mathcal{R}$ lié à la Terre et tournant avec celle-ci à la vitesse angulaire Ω constante autour de l'axe (Oz) dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen). La Terre présentant la symétrie de révolution autour de son axe de rotation, on travaillera dans le plan méridien (yOz) . En $M(y, z)$, la pression est notée $P(y, z)$. En O , la pression est notée P_0 et à la surface de la Terre, la pression est notée P_{atm} ;
- Un objet de masse m situé dans un référentiel en rotation de vitesse angulaire Ω , subit une force supplémentaire dite force d'entraînement d'expression $\vec{f}_{ie} = m\gamma\Omega^2\vec{u}_y$ avec y la distance de l'objet à l'axe de rotation et $\vec{u}_y$ le vecteur normal à l'axe de rotation ;
- la déformation de la Terre est suffisamment faible pour que le champ de gravitation créé par la Terre soit le même que celui de la Terre sphérique (de rayon R_T) et homogène. Pour un point M à l'intérieur de la Terre, son expression est donnée par $\vec{g} = -\frac{GM_T}{R_T^3}(y\vec{u}_y + z\vec{u}_z)$.



1. Donner l'expression des deux forces élémentaires en volume s'exerçant sur un volume élémentaire $d\tau$ de fluide centré sur M .
2. Montrer que $\frac{\partial P}{\partial y} = -K_1 y$ et $\frac{\partial P}{\partial z} = -K_2 z$ où K_1 et K_2 sont des constantes positives qu'on exprimera en fonction de G , ρ_0 , Ω , M_T et R_T .
3. En déduire que la ligne isobare à la surface de la Terre dans le plan (yOz) a pour équation $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ où on exprimera les constantes positives b et c en fonction de P_0 , P_{atm} , K_1 et K_2 .
4. Le volume de l'ellipsoïde de demi-grand axe b et de demi-petit axe c est $\frac{4}{3}\pi b^2 c$. Montrer que $\frac{b}{R_T} = \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T}\right)^{-1/6}$ et $\frac{c}{R_T} = \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T}\right)^{1/3}$.

5. Calculer $\frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T}$, puis donner l'expression linéaire de l'aplatissement $f = \frac{b-c}{c}$ et sa valeur numérique. On donne :
- $G = 6,67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$; $M_T = 5,98.10^{24}\text{kg}$ (masse de la Terre); $R_T = 6,38.10^3\text{km}$ (rayon de la Terre supposée sphérique) et $\Omega = 7,29.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$.