

TD = Éléments de statique des fluides en référentiel Galiléen

1. Fluides incompressibles

1.1. Équilibre de trois liquides non miscibles

1. $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p$ uniquement fonction de z

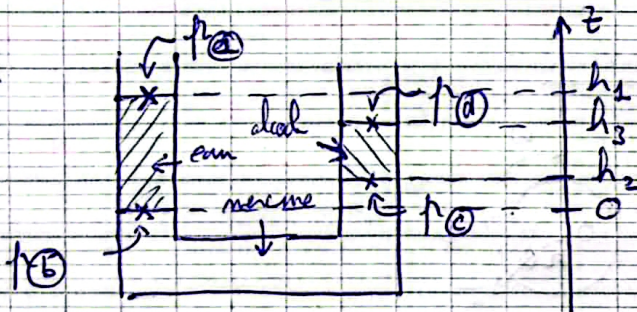
$\frac{dp}{dz} + \rho g = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g$ ou impossible $\Rightarrow p = \rho g z$

donc $\int_0^z \frac{dp}{dz'} \times dz' = \int_0^z (-\rho g) dz'$

donc $p(z) - p(0) = -\rho g(z - 0)$

donc $p(z) = p(0) - \rho g z$ une fonction affine

2.



- en A eau est en contact avec l'air donc $p_A = p_{atm.} = p_{eau}(h_1)$
- en B eau et mercure sont en contact au niveau $z=0$ donc $p_B = p_{eau}(0) = p_{mercure}(0)$
- en C alcool et mercure sont en contact au niveau $z = h_2$ donc $p_C = p_{mercure}(h_2) = p_{alcool}(h_2)$
- en D alcool est en contact avec l'air donc $p_D = p_{atm.} = p_{alcool}(h_3)$

d'après la relation du 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet p_{\text{atm}} = p_{\text{eau}}(0) - \rho_1 g h_1 \\ \bullet p_{\text{eau}}(0) = p_{\text{mercure}}(0) \end{array} \right\} \Rightarrow p_{\text{mercure}}(0) = p_{\text{atm}} + \rho_1 g h_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet p_{\text{mercure}}(0) - \rho_2 g h_2 = p_{\text{alcool}}(0) - \rho_3 g h_3 \\ \bullet p_{\text{atm}} = p_{\text{alcool}}(0) - \rho_3 g h_3 \end{array} \right. \Rightarrow p_{\text{alcool}}(0) = p_{\text{atm}} + \rho_3 g h_3$$

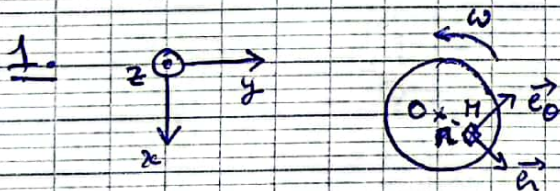
donc $p_{\text{atm}} + \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2 = p_{\text{atm}} + \rho_3 g h_3 - \rho_3 g h_2$

donc $\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2 = \rho_3 (h_3 - h_2)$

donc $\boxed{\rho_3 = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{h_3 - h_2}}$

$\underline{AN} = -\rho_3 = 0,67 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

1.2. Liquide en rotation



La particule dV tourne à vitesse constante donc elle décrit une trajectoire circulaire uniforme donc sa position est $\vec{OM} = r \vec{e}_r$
sa vitesse est $\vec{v} = r\omega \vec{e}_\theta (= \frac{d\vec{OM}}{dt})$ avec $r = \text{cte}$

son accélération est $\vec{a} = -r\omega^2 \vec{e}_r (= \frac{d\vec{v}}{dt})$ avec $r = \text{cte}$ et $\omega = \text{cte}$

Le système dV subit son poids $d\vec{F}_{\text{poids}} = \rho dV \vec{g}$ et la force de pression

$$d\vec{F}_{\text{pression}} = - \left[\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \right] dV$$

Le PFD s'écrit $dm \times \vec{a} = d\vec{F}_{\text{raib}} + d\vec{F}_{\text{pesih}}$

si on le projette sur $\vec{e}_z$: $0 = -\rho dVg - \frac{\partial p}{\partial z} dV \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$

si on le projette sur $\vec{e}_r$: $-dm \times r\omega^2 = 0 - \frac{\partial p}{\partial r} dV \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} - \rho r\omega^2 = 0$
 $n \, dm = \rho dV$

si on le projette sur $\vec{e}_\theta$: $0 = \frac{\partial p}{\partial \theta} \Rightarrow p$ ne dépend pas de θ

2. p ne dépend pas de θ donc $p = p(r, z)$

car liquide incompressible donc $\rho = \text{cte}$ $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$

donc $\int_{z=0}^z \frac{\partial p}{\partial z'} dz' = \int_0^z (-\rho g) dz' \Rightarrow p(r, z) - p(r, 0) = -\rho g z$

donc $p(r, z) = p(r, 0) - \rho g z$

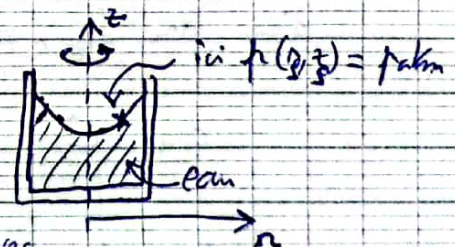
or $\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 \times r$ donc $\int_0^r \frac{\partial p}{\partial r'} dr' = \int_0^r \rho \omega^2 r' dr' \Rightarrow p(r, 0) - p(0, 0) = \rho \omega^2 \times \frac{r^2}{2}$

donc $p(r, 0) = p(0, 0) + \rho \omega^2 \times \frac{r^2}{2}$

donc $p(r, z) = p(0, 0) + \rho \omega^2 \times \frac{r^2}{2} - \rho g z$

Si on prend une coupe à $\theta = \text{cte}$

en un point de coordonnée (r_g, z_g) appartenant à la surface libre, le fluide est en contact avec l'air donc $p(r_g, z_g) = p_{\text{atm}}$.

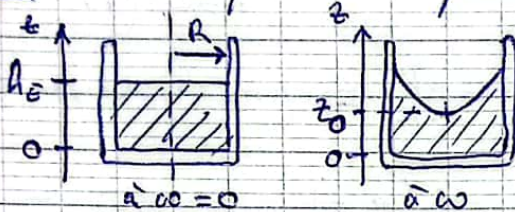


donc $p(0, 0) + \rho \omega^2 \times \frac{r_g^2}{2} - \rho g z_g = p_{\text{atm}}$

$$\text{donc } z_s = \frac{p(0,0) - p_{atm}}{\rho g} + \frac{\omega^2}{2g} \times r_s^2$$

donc l'expression de z_0 en fonction de r_0 est une parabole
d'où la forme parabolique $z_s = c + \frac{\omega^2}{2g} r_s^2$

3. L'eau liquide est incompressible donc son volume se conserve



à l'équilibre : ~~$p_{atm} = p(0,0) + \rho g h_E$~~

$$V = h_E \times \pi R^2$$

en rotation : $V = \int_{n=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{C + \frac{\omega^2}{2g} n^2} n \, dn \, d\theta \, dz$

$$\text{donc } V = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \times \left(\int_{n=0}^R \left[\int_{z=0}^{C + \frac{\omega^2}{2g} n^2} dz \right] n \, dn \right)$$

$$\text{donc } V = 2\pi \times \int_0^R \left[C + \frac{\omega^2}{2g} n^2 \right] n \, dn$$

$$\text{donc } V = 2\pi \left[C \frac{R^2}{2} + \frac{\omega^2}{8g} R^4 \right]$$

donc $h_E \times \pi R^2 = \pi R^2 \left[C + \frac{\omega^2}{4g} R^2 \right]$

$$\text{donc } C = h_E - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

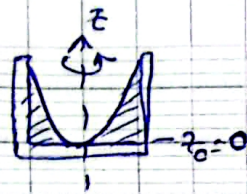
$$\text{donc } z_s = C + \frac{\omega^2}{2g} r_s^2 = h_E - \frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{\omega^2}{2g} r_s^2$$

or z_0 est la valeur de z_s pour $r_s = 0$

$$\text{donc } z_0 = h_E - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

4. On voit le fond du cylindre sec si $z_0 = 0$

$$\text{donc } 0 = h_E - \frac{\omega_1^2 R^2}{4g} \quad \text{donc } \boxed{\omega_1 = \frac{2\sqrt{gh_E}}{R}}$$

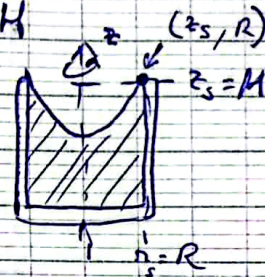


5. On voit le liquide déborder si z_s pour $r_s = R$ vaut H

$$\text{donc } H = h_E - \frac{\omega_2^2 R^2}{4g} + \frac{\omega_2^2}{2g} R^2$$

$$\text{donc } H = h_E + \frac{\omega_2^2 R^2}{4g}$$

$$\text{donc } \boxed{\omega_2 = \frac{2\sqrt{g(H-h_E)}}{R}}$$



2. Fluides compressibles

2.1. Modèles d'atmosphère

1. Le champ de gravitation varie en $\frac{1}{(R_T+z)^2}$ donc il peut être considéré uniforme sur $z \ll R_T$, la pression de l'air diminue donc on peut considérer vérifier l'hypothèse gaz parfait, l'hypothèse d'atmosphère isotherme n'est pas vraiment valable que sur quelques centaines de m.

2. relation fondamentale de la statique des fluides = $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p$ ne dépend que de z

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = 0 \quad \text{on pour un gaz parfait}$$

$$p \times v = \frac{RT_0}{M}$$

$$\text{donc } \rho = \frac{1}{v} = \frac{M}{RT_0} p$$

$$\text{donc } \frac{dp}{dz} + \frac{Mg}{RT_0} p = 0 \quad \text{on pose } \boxed{H = \frac{RT_0}{Mg}}$$

$$\text{donc } \boxed{p(z) = p_0 e^{-z/H}}$$

$$3. \quad n(z) = \frac{p \times (M/v)}{RT_0}$$

$$\text{soit } n(z) = \frac{dN}{dV} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{nombre de particules} \\ \text{dans le volume} \end{array}$$

$$n(z) = \frac{\Delta A \times p(z)}{RT_0}$$

$$\text{donc } n(z) = \frac{P_0 \times \Delta A}{RT_0} e^{-z/H}$$

$n(z)$ est exponentiellement décroissante

que l'on peut aussi écrire $n(z) = \frac{P_0}{k_B T_0} \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T_0}\right)$ avec m la masse d'une molécule $M = m \Delta A$
 avec $R = k_B \Delta A$
 Énergie potentielle d'une molécule
 Énergie cinétique d'une molécule à T_0

$$z_G = \frac{1}{\int_0^{+\infty} n(z) dz} \times \int_0^{+\infty} z \times n(z) dz$$

↑ nbre de particules à l'altitude z
 ↑ nbre de particules total

$$\int_0^{+\infty} n(z) dz = \frac{P_0}{k_B T_0} \times \int_0^{+\infty} e^{-z/H} dz = \frac{P_0 \times H}{k_B T_0} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \frac{P_0 \times H}{k_B T_0} \times 1$$

avec $u = z/H$

$$\text{donc } z_G = \frac{k_B T_0}{P_0 \times H} \int_0^{+\infty} z \times \frac{P_0}{k_B T_0} e^{-z/H} dz = \int_0^{+\infty} \frac{z}{H} e^{-z/H} dz$$

$$\text{donc } z_G = H \times \int_0^{+\infty} u e^{-u} du$$

$$\text{donc } \boxed{z_G = H}$$

$$\text{or } H = \frac{RT}{\rho g} \text{ donc } z_G = \frac{R}{\rho g} \times T, \text{ } z_G \text{ est proportionnel à } T \text{ (en Kelvin)}$$

(plus la température est élevée plus elles convertissent leur énergie cinétique en énergie potentielle de pesanteur)

5. Les monts indiqués sont autour de 10^3 à 10^4 m donc 10^5 Pa donc d'altitude utilisée on se situe à 10^5 Pa.

Comme $p(z)$ dépend exponentiellement de z , sinon les courbes seraient

des lignes de niveau (iso-altitudes) et non des isobares.

6. (a) si T dépend de z alors on doit modifier l'éq. différentielle

$$\frac{dp}{dz} + \frac{Mg}{RT(z)} p = 0$$

$$\text{donc } \frac{dp}{dz} + \frac{Mg}{RT_0} \times \frac{p}{1 - \frac{\lambda}{T_0} z} = 0$$

$$\text{donc } \frac{dp}{p} + \frac{1}{H} \times \frac{dz}{1 - \frac{\lambda}{T_0} z} = 0$$

$$\text{donc } d(\ln(p)) + \frac{1}{H} \times \left(-\frac{T_0}{\lambda}\right) \times d\left(\ln\left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right)\right) = 0$$

$$\text{donc } \ln(p) - \frac{T_0}{\lambda H} \ln\left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right) = C \text{ avec } C \text{ une constante}$$

$$\text{donc } p(z) = \exp(C) \times \exp\left(\frac{T_0}{\lambda H} \ln\left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right)\right)$$

$$\text{donc } p(z) = A \times \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right)^{T_0/\lambda H} \text{ avec } A \text{ une cte}$$

$$\text{or } p(0) = P_0 = A$$

$$\text{donc } \boxed{p(z) = P_0 \times \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right)^{T_0/\lambda H}}$$

$$(b) \quad z = 8850 \text{ m}, \quad \boxed{p(z) = 0,35 \text{ bar}}$$

7. pour $z \ll H$, alors $\exp\left(-\frac{z}{H}\right) \approx 1 - \frac{z}{H}$

$$\text{donc } p(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \approx P_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

$$\text{or } \frac{\lambda z}{T_0} \ll \frac{\lambda H}{T_0} = \frac{\lambda R T_0}{T_0 \times H g} = \frac{\lambda R}{H g} = 0,15$$

$$\text{donc } \frac{\lambda z}{T_0} \ll 1, \text{ alors } \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)^{T_0/\lambda H} \approx 1 - \frac{T_0}{\lambda H} \times \frac{\lambda z}{T_0}$$

$$\text{donc } p(z) = P_0 \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)^{T_0/\lambda H} \approx P_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

2.2. Évaluation de la masse de l'atmosphère

1. $\rho = \frac{1}{v}$ avec v le volume molaire
 or $v = \frac{R T_0}{\mu M}$

$$\text{donc } \rho = \frac{M}{R T_0} p(z) = \frac{P_0 M}{R T_0} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad \text{or } H = \frac{R T_0}{\mu g}$$

$$\text{donc } p(z) = \frac{P_0}{g H} \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$



$$dm = \rho(z) \times dV = \rho(z) \times 4\pi r^2 \cdot dr$$

$$\text{donc } dm = \rho(z) \times 4\pi (R_T + z)^2 dz$$

$$\text{donc } dm = 4\pi R_T^2 \times \frac{P_0}{g H} \times \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2 \times e^{-z/H} dz$$

2. hypothèse $z \ll R_T \Rightarrow \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2 \approx 1$ à l'ordre 0

Approx. $z_{max} \gg H \Rightarrow$ on intègre l'exponentielle de 0 à $+\infty$

$$\text{donc } m \approx \frac{4\pi R_T^2 P_0}{gH} \times 1 \times \int_0^{+\infty} e^{-z/H} dz \quad \text{soit } u = \frac{z}{H}$$

$$\text{donc } m \approx \frac{4\pi R_T^2 P_0}{g} \times \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-u} du}_{=1}$$

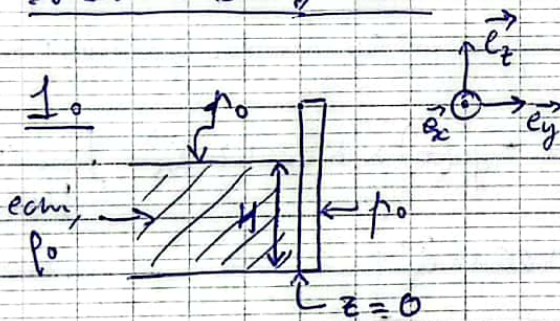
$$\text{donc } \boxed{m \approx \frac{4\pi R_T^2 P_0}{g}}$$

$$\underline{AN:} \quad m \approx 5,2 \cdot 10^{18} \text{ kg}$$

3. Résultante des forces de pression

3.1. Résultante des forces de pression sur un barrage

3.1.1. Barrage droit



- Sur la surface libre la pression est uniforme donc la force est $-p_0 \times S \vec{e}_y$
soit $-p_0 H L \vec{e}_y$

- Sur la face immergée du barrage, l'eau est incompressible donc $p(z) + \rho_0 g z = \text{cte}$ or à $z=H$, $p(H) = p_0$

$$\text{donc } p(z) + \rho_0 g z = p(H) + \rho_0 g H = p_0 + \rho_0 g H$$

$$\text{donc } p(z) = p_0 + \rho_0 g (H - z)$$

$$\begin{aligned} \text{et la force de pression est } \int_{z=0}^H \int_{x=0}^L p(z) \times d\vec{z} d\vec{y} &= L \times \int_0^H [p_0 + \rho_0 g (H - z)] dz \vec{e}_y \\ &= L \times \left[p_0 H + \rho_0 g \left(H^2 - \frac{H^2}{2} \right) \right] \vec{e}_y \end{aligned}$$

Donc le résultat $\vec{F} = -\rho_0 H L \vec{e}_y + \left[\rho_0 H L + \rho_0 g L \frac{H^2}{2} \right] \vec{e}_y$

$$\text{donc } \boxed{\vec{F} = \frac{\rho_0 g L H^2}{2} \vec{e}_y}$$

3.1.2. Bannage voute

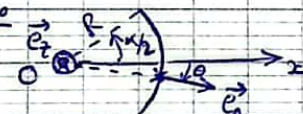
1. On utilise l'équation locale de la statique des fluides

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0, \text{ l'eau liquide est incompressible donc } \rho = \text{cte}$$

$$\text{donc } \frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$\text{donc } \boxed{p(z) = p(0) - \rho g z} \quad \text{or } p(H) = p_{\text{atm}} \text{ donc } p(0) = p_{\text{atm}} + \rho g H$$

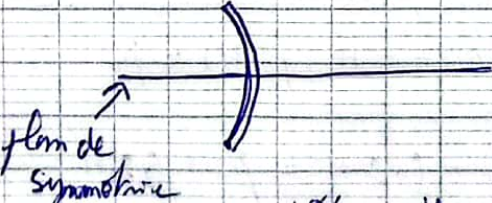
$$\text{soit } \boxed{p(z) = p_{\text{atm}} + \rho g (H - z)}$$

2.  on se place en coordonnées cylindriques

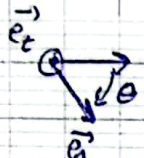
$$d\vec{F}_r = -p(z) \times R d\theta dz \vec{e}_n \quad \text{force exercée par l'eau sur le bannage}$$

$$\vec{F} = \int_{\theta = -\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} \int_{z=0}^H \left[-p(z) \times R d\theta dz \vec{e}_n \right]$$

Comme le bannage est symétrique par rapport au plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ on peut en conclure que $\vec{F} \parallel \vec{e}_x$

 et calculer simplement $\vec{F} \cdot \vec{e}_x$

$$\text{donc } \vec{F} \cdot \vec{e}_x = \int_{\theta = -\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} \int_{z=0}^H \left[-p(z) R d\theta dz \vec{e}_n \cdot \vec{e}_x \right]$$


 $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = \cos(\theta)$

$$\text{donc } \vec{F}_- \cdot \vec{e}_x = \int_{\theta=-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} \int_{z=0}^H \left[-p(z) R d\theta dz \times \cos(\theta) \right]$$

$$\vec{F}_- \cdot \vec{e}_x = \left(\int_{\theta=-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} \cos(\theta) d\theta \right) \times R \times \left(- \int_{z=0}^H [p_{atm} + \rho g (H-z)] dz \right)$$

$$\vec{F}_- \cdot \vec{e}_x = - \left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \right) \times R \times \left(p_{atm} H + \rho g \left(H^2 - \frac{H^2}{2} \right) \right)$$

$$\vec{F}_- \cdot \vec{e}_x = -2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) R \left(p_{atm} H + \rho g \frac{H^2}{2} \right)$$

de même on peut calculer la force exercée par l'air sur le bannage

$$d\vec{F}_+ = + p_{atm} \times R d\theta dz \vec{e}_r$$

$$\text{donc } \vec{F}_+ = \int_{\theta=-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} \int_{z=0}^H p_{atm} R d\theta dz \vec{e}_r$$

on de même $\vec{F}_+ \parallel \vec{e}_x$

$$\text{donc } \vec{F}_+ \cdot \vec{e}_x = \int_{\theta=-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} \int_{z=0}^H p_{atm} R d\theta dz \times \cos(\theta)$$

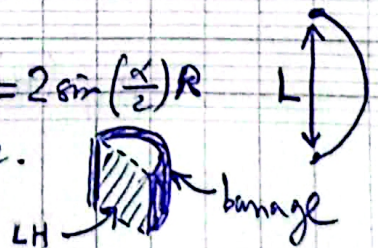
$$= \left(\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} \cos(\theta) d\theta \right) R \times \int_0^H p_{atm} dz$$

$$\text{donc } \vec{F}_+ \cdot \vec{e}_x = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) R p_{atm} \times H$$

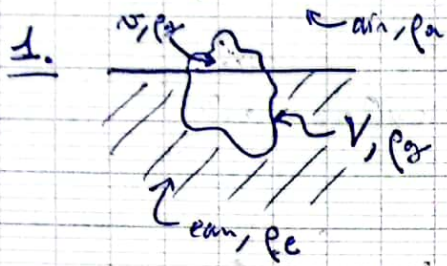
$$\text{donc } \vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = \left[2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) R p_{atm} H - 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) R \left(p_{atm} H + \rho g \frac{H^2}{2} \right) \right] \vec{e}_x$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{F} = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) R \times \left[-\rho g \frac{H^2}{2} \right] \vec{e}_x}$$

Remarque: on retrouve le résultat précédent avec $L = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) R$ qui donne $L \times H$ la section droite du bannage.



3.2. La partie émergée de l'iceberg



Système : Iceberg entier

Bilan des Forces : poids $\vec{P} = m\vec{g} = \rho_g V \vec{g}$

Poussée d'Archimède dans l'eau $\vec{\pi}_e = -\rho_e (V-v) \vec{g}$

Poussée d'Archimède dans l'air $\vec{\pi}_a = -\rho_a v \vec{g}$

Iceberg immobile $\Rightarrow$ PFS : $\vec{O} = \vec{P} + \vec{\pi}_e + \vec{\pi}_a$

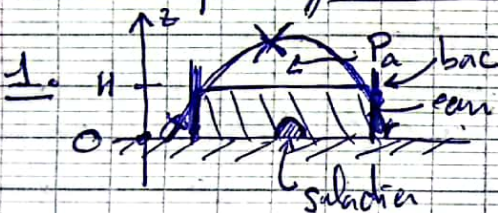
on projette sur $\vec{e}_z$: $0 = -\rho_g V g + \rho_e (V-v) g + \rho_a v g$

donc $0 = -(\rho_e - \rho_g) V + (\rho_a - \rho_e) v$

donc $\boxed{\frac{v}{V} = \frac{\rho_e - \rho_g}{\rho_e - \rho_a}}$

A.N. $\frac{v}{V} =$

3.3. Statique des fluides en géométrie sphérique



équation locale de la statique des fluides

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p(z)$$

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = 0 \quad \text{ou eau liq. incompressible}$$

donc $p = \rho g z$

donc $\int_0^z \frac{dp}{dz'} dz' = - \int_0^z \rho g dz'$

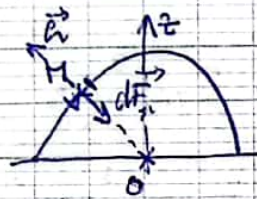
donc $p(z) - p(0) = -\rho g (z - 0)$

donc $p(z) = p(0) - \rho g z$

ou $p(H) = P_a$ donc $p(0) - \rho g H = P_a$

donc $\boxed{p(z) = P_a + \rho g (H - z)}$

2.



$$d\vec{F}_n = -p(r) dS \vec{e}_r$$

$$\text{or } dS = (R d\theta) \times (R \sin(\theta) d\varphi)$$

$$dz = R \cos(\theta)$$

$$\text{donc } d\vec{F}_n = -p(R \cos(\theta)) R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \vec{e}_r$$

3. Par symétrie de rotation autour de l'axe (Oz), $\vec{F}_n \parallel \vec{e}_z$

$$\text{donc on calcule } \vec{F}_n \cdot \vec{e}_z = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\vec{F}_n \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_n \cdot \vec{e}_z = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} -p(R \cos(\theta)) R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z)$$

or $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \cos \theta$

$$\text{donc } \vec{F}_n \cdot \vec{e}_z = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} -p(R \cos \theta) R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$$

$$\vec{F}_n \cdot \vec{e}_z = \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right) \times \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} -[P_a + \rho g H - \rho g R \cos \theta] R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \right)$$

$$\vec{F}_n \cdot \vec{e}_z = 2\pi R^2 \left(\int_0^{\pi/2} [P_a + \rho g H] \sin \theta \cos \theta d\theta - \int_0^{\pi/2} \rho g R \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right)$$

or $\sin \theta d\theta = du$ avec $u = \cos \theta$

$$\vec{F}_n \cdot \vec{e}_z = 2\pi R^2 \left(\int_{-1}^0 [P_a + \rho g H] \times (-u) du + \int_{-1}^0 \rho g R u^2 du \right)$$

$$\text{donc } \vec{F}_p \cdot \vec{e}_z = 2\pi R^2 \left([P_a + \rho g H] \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \rho g R \times \left(\frac{1}{3}\right) \right)$$

$$\text{donc } \vec{F}_p \cdot \vec{e}_z = -\pi R^2 [P_a + \rho g H] + \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{F}_p = -\pi R^2 [P_a + \rho g H] \vec{e}_z + \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g \vec{e}_z}$$

On reconnaît deux termes $\frac{2}{3} \pi R^3 \rho g \vec{e}_z$ la poussée d'Archimède sur le solide, mais auquel on a soustrait $[P_a + \rho g H] \times (\pi R^2) \vec{e}_z$ qui la force de pression sur le fond car il n'y a pas de fluide sous le solide.

