

Travaux dirigés du chapitre : 2.3 Énergétiques des fluides en écoulement laminaire stationnaire dans une conduite

Partie : 2 Mécanique des fluides appliquée aux machines thermodynamiques

1 Calculs de forces de frottement :

1.1 Force de traînée :

Considérons une sphère de vitesse v , de rayon R en mouvement uniforme dans un fluide de viscosité η et de masse volumique ρ .

1. On cherche à déterminer la traînée exercée sur la sphère. Cette force exercée par le fluide sur la sphère est fonction de v , R , ρ et R_e le nombre de Reynolds. La force de traînée peut se mettre sous la forme $F = \frac{\pi}{2} C_x(R_e) R^\alpha v^\gamma \rho^\lambda$ où $C_x(R_e)$ représente une fonction de R_e et α , γ et λ sont des entiers naturels. Par analyse dimensionnelle, déterminer α, γ et λ .
2. Dans le cas d'un écoulement rampant, ($R_e < 1$), nous obtenons la loi dite de Stokes : $\vec{F} = -6\pi R \eta \vec{v}$. Préciser alors la valeur de C_x en fonction de R_e .
3. Que devient cette force pour un fluide parfait ?

1.2 Chute d'un grêlon

Un grêlon sphérique de masse m , de rayon $r = 3$ mm et de masse volumique $\rho_{\text{glace}} = 0,9.10^3$ kg.m⁻³ tombe verticalement, l'espace étant rapporté à l'axe (Oz) vertical ascendant. Le champ de pesanteur est uniforme $g = 9,8$ m.s⁻² dirigée suivant la verticale descendante, l'air a une viscosité $\eta = 2.10^{-5}$ Pl.

1. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29$ g.mol⁻¹, de pression $P = 1,0$ bar et de température $T = 273$ K. Calculer sa masse volumique ρ_{air} . Que dire alors de la poussée d'Archimède s'exerçant sur le grêlon en comparaison de son propre poids ?
2. (a) On cherche la vitesse atteinte par le grêlon en régime permanent. On se place dans le cadre d'une hypothèse de "vitesses faible" où l'écoulement est laminaire. La force de traînée vérifie la formule de Stokes : $\vec{F} = -6\pi \eta r v \vec{e}_z$. Déterminez la vitesse limite dans le cadre de cette modélisation.
(b) Calculez le nombre de Reynolds en prenant pour dimension caractéristique de l'écoulement le diamètre du grêlon $2r$. Que dire alors de l'hypothèse d'écoulement laminaire ?
(c) Dans le cadre d'une hypothèse de "grande vitesse" où l'écoulement est turbulent, la force de traînée est quadratique en vitesse : $\vec{F} = -K \rho_{\text{air}} S v^2 \vec{e}_z$ avec $S = \pi r^2$ et $K = 0,23$. Déterminez la vitesse limite dans le cadre de ce modèle. Calculer le nombre de Reynolds, commenter.
3. Dans le cadre de vitesses faibles, exprimer le nombre de Reynolds R_e en fonction de ρ_{air} , ρ_{glace} , η , g et r . En déduire l'ordre de grandeur du rayon maximal r_{max} du grêlon pour

que la formule de Stokes soit valable. On pourra prendre pour critère R_e inférieur à 1. Commenter.

4. Dans le cadre de vitesses grandes, exprimer de même le nombre de Reynolds R_e en fonction de ρ_{air} , ρ_{glace} , η , K , g et r . En déduire l'ordre de grandeur du rayon minimal r_{min} du grêlon pour que cette hypothèse soit valable. On pourra prendre pour critère un R_e supérieur à 2000. Commenter.

2 Écoulement visqueux

2.1 Le pas du patineur

Le déplacement d'un skieur de fond est permis par une fine couche d'eau liquide sous le ski générée par la fonte des cristaux de neige sous l'effet des frottements de contact de la semelle du ski. Pour simplifier, nous considérerons que cette couche liquide est d'épaisseur constante e .

Le skieur de masse m évolue sur le plan horizontal (O, x, y) . Sous le ski, la couche de fluide d'épaisseur e et de surface S , située dans l'intervalle $0 \leq z \leq e$, est mise en mouvement par les skis. L'écoulement de fluide est supposé stationnaire, homogène et incompressible, la vitesse y est supposée de la forme $\vec{v} = v(z)\vec{e}_x$. On suppose que le fluide au contact de la semelle a la même vitesse V que le ski. L'eau est un fluide visqueux de viscosité dynamique η .

1. En appliquant le théorème de la résultante cinétique projeté suivant (Ox) à une tranche de fluide d'épaisseur z située entre 0 et z , justifier que le régime permanent amène à la relation : $\frac{dv}{dz} = \text{cte}$. En déduire le profil de vitesse $v(z)$ dans le fluide et tracer son allure dans la couche de fluide. On notera V la vitesse du skieur supposée permanente dans cette question.
2. En supposant l'expression de la vitesse du fluide $v(z)$ toujours valable ici, étudier le mouvement du skieur et déterminer sa vitesse $V(t)$ en fonction du temps. A $t = 0$ on donne $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = V_0$. Exprimez le temps caractéristique τ de la décroissance de la vitesse V du skieur en fonction de e , S , η et m .

Calculer τ avec $e = 8 \mu\text{m}$, $\eta = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$, $m = 60 \text{ kg}$ et $S = 0,05 \text{ m}^2$ (on note que la surface effective de contact entre les skis et la neige est très inférieure à la surface des semelles des skis).

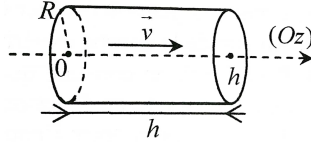
3. L'épaisseur de la couche de fluide est en réalité liée à la puissance des forces de viscosité. Nous supposons pour simplifier que la quantité de chaleur ainsi dégagée lors d'un déplacement dx du ski est intégralement utilisée pour provoquer la fusion de la neige sur la largeur L , l'épaisseur e et la longueur dx . En déduire l'épaisseur e en fonction de la chaleur latente massique de fusion de la neige L_{fus} , la vitesse du skieur V , la surface S , η , ρ et L . Montrer qu'alors la force du fluide sur les skis est de la forme $-k\sqrt{V}$. Exprimer k . Déterminer la vitesse du skieur V en fonction de m , k , V_0 la vitesse initiale et du temps t .

Calculer le temps pour lequel la vitesse s'annule pour $V_0 = 6,0 \text{ m.s}^{-1}$, $m = 60 \text{ kg}$ et $k = 30 \text{ SI}$.

2.2 Écoulement du sang dans une artère

Le sang qui est ici assimilé à un fluide incompressible de masse volumique ρ , de viscosité dynamique η s'écoule dans une artère modélisée par une conduite cylindrique horizontale de

rayon R et de hauteur h et de section constante.

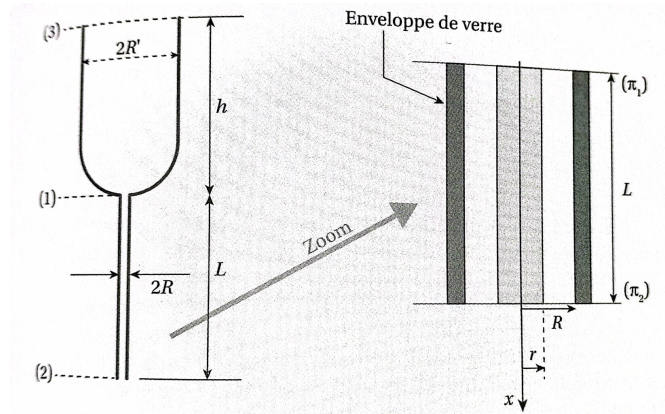


On suppose que l'écoulement y est laminaire, incompressible et stationnaire. Par symétrie, la vitesse du fluide est de la forme $\vec{v} = v(r, z)\vec{e}_z$. En $z = h$ la pression est prise égale à P_1 et en $z = 0$ elle vaut $P_1 + \Delta P$ où ΔP est la surpression imposée par le cœur permettant l'écoulement du fluide en compensant la chute de pression associée à la viscosité.

1. (a) Montrer que $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$.
 (b) Appliquer le théorème de la résultante cinétique au fluide contenu dans un cylindre de rayon r inférieur à R et de hauteur h . Pour fixer le sens de la force de cisaillement subie par le fluide, on remarquera que $\frac{dv}{dr} < 0$, la vitesse étant nulle sur la paroi de l'artère en $r = R$. En déduire $\frac{dv}{dr}(r)$ puis $v(r)$.
2. En déduire le débit massique D_m en fonction de ΔP et des autres données (loi dite de Hagen-Poiseuille).
3. (a) Le rayon de l'artère est divisé par 2, ΔP étant fixé. Par quel facteur est divisé le débit massique de sang ?
 (b) Exprimer le nombre de Reynolds Re de l'écoulement en fonction de R , η et D_m . Le calculer numériquement. Commenter.

2.3 Écoulement de Poiseuille vertical

On considère un viscosimètre constitué d'un capillaire cylindrique de rayon intérieur R , de longueur L , et surmonté d'un réservoir de rayon $R' \gg R$ et de hauteur h , tous deux remplis d'un liquide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η que l'on cherche à déterminer. L'écoulement du liquide du haut vers le bas dans le capillaire est supposé stationnaire.



On s'intéresse à une portion de liquide (en grisé sur le schéma ci-dessus) contenue dans un cylindre de rayon $r < R$, compris entre les plans π_1 et π_2 distants de L . On rappelle que sur la

surface latérale de ce cylindre de rayon r s'exerce une force de viscosité parallèle à (Oz) dont la norme est :

$$F(r) = \eta \left| \frac{\partial V_z(r)}{\partial r} \right| S(r)$$

où $S(r)$ est la surface latérale du cylindre de rayon r et de hauteur L . Les pressions au niveau des plans π_1 et π_2 sont notées P_1 et P_2 .

1. Justifier qu'en régime stationnaire, la vitesse du fluide ne dépende pas de z dans le capillaire. Effectuer un bilan des forces sur la portion de liquide cylindrique de rayon r et de hauteur L . En déduire une expression du gradient radial de vitesse dans le capillaire.
2. Énoncer les conditions aux limites traduisant l'adhérence visqueuse du fluide sur les parois. En déduire l'expression du profil radial de vitesse $v(r)$. Commenter.
3. Montrer que le débit volumique de cet écoulement gravitaire s'écrit :

$$D_V = \frac{\pi R^4}{8\eta} \times \frac{P_1 - P_2 + \rho g L}{L}$$

Si le poids est négligé devant l'action du gradient de pression (notamment pour des écoulements quasi-horizontaux), cette relation est appelée "loi de Poiseuille".

4. Les sections (2) et (3) du viscosimètre sont à l'air libre, et la section du capillaire est très faible devant celle du réservoir ($R \ll R'$). Déterminer alors l'expression de l'écart de pressions $P_1 - P_2$ en régime stationnaire.
5. En tenant désormais compte de la lente vidange du réservoir, exprimer le débit volumique D_V en fonction de R' et de $h(t)$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$.
6. Sachant qu'il a fallu 7,0 minutes pour que le niveau initial du réservoir $h_0 = 10,0$ cm baisse de moitié, en déduire la viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ du fluide. On donne $2R = 1,0$ mm, $R' = 1,0$ cm et $L = 10,0$ cm.

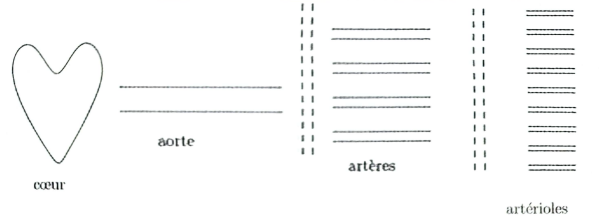
2.4 Calculer des pertes de charge

La circulation sanguine peut être modélisée par un écoulement de Poiseuille cylindrique stationnaire, dont le moteur est le pompage par le cœur du sang de viscosité $\eta_s = 6.10^{-3}$ Pa.s. La loi de Poiseuille en régime laminaire donne l'expression du débit volumique D_V de sang à travers un vaisseau horizontal de longueur L et de rayon a , soumis à la différence de pression ΔP :

$$D_V = \frac{\pi a^4}{8\eta_s} \times \frac{\Delta P}{L}$$

1. Dans le cadre d'une aorte, le rayon vaut $a = 1,0$ cm la longueur $L = 20$ cm, et le débit volumique est celui du cœur $D_V = 6,0$ L.min⁻¹. Calculer la vitesse moyenne v du sang dans l'aorte. Calculer la différence de pression ΔP entre le début et la fin de l'aorte. Commenter le résultat en sachant que la surpression sanguine disponible à la sortie du cœur est d'environ $P_c = 10$ kPa.
2. Évaluer le nombre de Reynolds dans l'aorte. Commenter.
3. Dans le cas d'un écoulement stationnaire dans un artère horizontale de rayon $a_a = 1$ mm, de longueur $L_a = 10$ cm, et soumis à un saut de pression $\Delta P_a = 2 \times 10^3$ Pa correspondant à sa perte de charge régulière, exprimer littéralement, puis calculer la force de frottement visqueux exercée par la paroi sur l'écoulement sanguin. Comparer au poids du sang contenu dans l'artère ; commenter selon que l'on s'intéresse à un corps debout ou allongé.

- Le sang possède une capacité thermique massique $c_s = 4,0 \text{ kJ.kg}^{-1}$. Estimez la variation de température ΔT du sang entre son entrée et sa sortie de l'artère. Commenter.
- Afin d'étudier la vascularisation du corps humain, on propose un modèle simple représenté sur la figure ci-dessous. Le sang est évacué du cœur par l'aorte, qui se divise ensuite en N_a artères de rayon a_a et de longueur L_a , parcourues chacune par le débit volumique $D_{V,a}$, puis en N'_a artérioles de rayon a'_a et de longueur L'_a , comme illustré sur le schéma ci-dessous. La vitesse moyenne du sang dans une artériole est v'_a . Exprimer N_a puis N'_a en fonction de D_V , $D_{V,a}$, v'_a et a'_a . Calculer N_a et N'_a , avec $D_{V,a} = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^3$, $v'_a = 0,5 \text{ cm.s}^{-1}$ et $a'_a = 20 \text{ }\mu\text{m}$.



- Exprimer le rapport des pertes de charges $\beta = \frac{\Delta P'_a}{\Delta P}$ aux extrémités des artérioles et aux extrémités de l'aorte en fonction de a , a'_a , L , L'_a et N'_a . Calculer β pour une longueur d'artériole $L'_a = 0,5 \text{ cm}$. Expliquer alors en quoi la nécessaire vascularisation ramifiée du corps humain impose au pompage cardiaque des performances élevées.

2.5 Sténose artérielle

Le système cardio-vasculaire a pour fonction d'apporter aux tissus et aux organes l'oxygène et les nutriments nécessaires à leur fonctionnement, ainsi que de les débarrasser des déchets générés par leur métabolisme. Pour ce faire, la circulation du sang doit s'établir des artères jusqu'aux capillaires. On étudie ici dans un modèle cylindrique la détection d'une sténose artérielle, correspondant à un rétrécissement localisé mais problématique dans l'artère.

L'écoulement du sang dans une artère peut être décrit en première approximation comme l'écoulement laminaire incompressible en régime stationnaire, d'un fluide visqueux de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ , dans un tronçon cylindrique horizontal d'axe (Ox) , de rayon R et de longueur L . Cet écoulement horizontal suit une loi de Poiseuille dont la loi de vitesse est :

$$\vec{v}(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \vec{e}_x$$

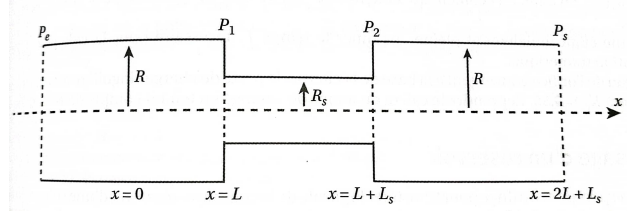
où r est la distance radiale d'un point de l'écoulement à l'axe (Ox) , et ΔP est le différentiel de pression imposé entre l'entrée et la sortie du tronçon cylindrique de longueur L .

- Exprimer le débit volumique D_V de l'écoulement en fonction de η , R , ΔP et L . En déduire l'expression de la vitesse moyenne de l'écoulement v_m . Application numérique : estimer la valeur numérique de v_m et du nombre de Reynolds d'un tel écoulement en l'absence de sténose.

Données : $\rho = 1,06 \times 10^6 \text{ kg.m}^{-3}$; $\eta = 6 \text{ mPa.s}$; $R = 6 \text{ mm}$; $L = 8,0 \text{ cm}$; $\Delta P = 40 \text{ Pa}$.

- Montrer que l'on peut procéder à une analogie entre la description de cet écoulement et les lois de l'électrocinétique. En tirer une définition de la résistance hydraulique R_h d'un vaisseau sanguin faisant intervenir son débit volumique D_V et son différentiel de pression ΔP . En déduire alors l'expression de R_h en fonction de L , R et η .

Une sténose correspond à une réduction brutale et localisée du diamètre d'un vaisseau sanguin. On modélise cette situation par la juxtaposition en série de trois tronçons coaxiaux de rayons respectifs R , R_s et R et de longueurs respectives L , L_s et L , comme illustré sur la figure ci-dessous



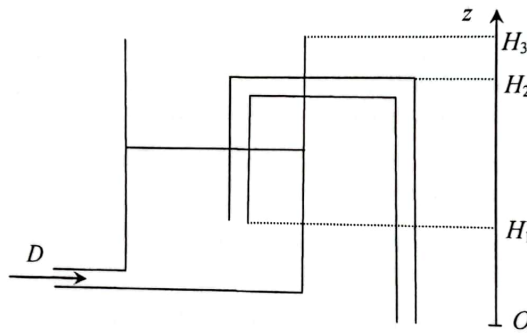
3. L'écoulement étant supposé stationnaire, que peut-on dire du débit volumique D_V ? Traduire cela par une relation liant les vitesses et les sections de chaque tronçon.
4. Établir la relation liant la résistance hydraulique totale $R_{h,tot}$ aux résistances $R_{h,1}$, $R_{h,2}$ et $R_{h,3}$ des trois tronçons. En déduire le différentiel de pression $P_1 - P_2$ en entrée/sortie de la sténose, en fonction notamment de l'écart total de pression $P_e - P_s$.
5. Calculer la vitesse moyenne v_s dans la zone sténosée et la vitesse moyenne v hors de la sténose. En déduire la valeur du nombre de Reynolds dans chaque partie de l'artère.
Données : $L_s = 1,0$ cm ; $2L + L_s = 8,0$ cm ; $\Delta P = 40$ Pa ; $R_s = 2$ mm ; $R = 6$ mm
6. Quel est le problème posé par la sténose en terme de vascularisation ? Proposer une méthode qui permette de diagnostiquer ce problème.

3 Exploitation de la relation de Bernoulli :

3.1 Étude d'un siphon

Un récipient de section S se remplit d'eau assimilée à un fluide parfait incompressible avec un débit volumique constant D . Il est susceptible de se vider par l'intermédiaire d'un siphon de section s lorsque celui-ci est amorcé donc lorsque la hauteur d'eau atteint H_2 .

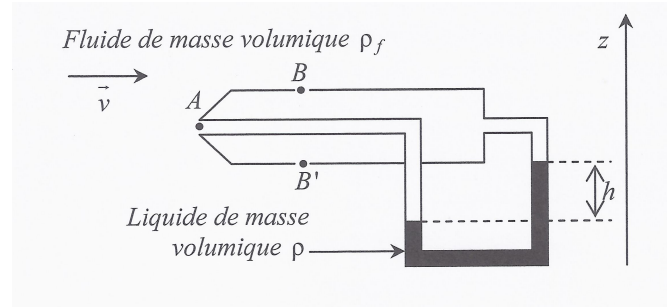
L'origine de l'axe vertical (Oz) est située à la base du siphon. On considère que la section de la surface libre est très supérieure à s . On pose $D_1 = s\sqrt{2gH_1}$, $D_2 = s\sqrt{2gH_2}$ et $D_3 = s\sqrt{2gH_3}$.



1. Décrire qualitativement ce qui se passe suivant la valeur de D . On distinguera 4 cas : $D < D_1$, $D_1 < D < D_2$, $D_2 < D < D_3$, et $D > D_3$.
2. Dans le cas où le mouvement est périodique, exprimer sa période T . L'un des termes de T comporte une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.

3.2 Tube de Pitot

Un dispositif utilisé classiquement pour la mesure de la vitesse d'un fluide (dans le domaine de l'aéronautique par exemple) est le tube de Pitot : il permet la mesure relative d'un fluide par rapport au tube (fixé sur l'avion par exemple). Le tube doit être suffisamment petit pour ne pas trop perturber l'écoulement. Le schéma de principe est donné ci-dessous :



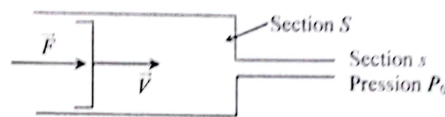
Le point A est dit **point d'arrêt**, c'est-à-dire que la vitesse en A du fluide est nulle ; la pression au point A est appelée **pression totale**.

En B , la vitesse est celle de l'écoulement et la pression en B est appelée **pression statique**.

1. Expliquer les 3 termes en italique, définis ci-dessus.
2. Les dimensions du tube sont petites : que peut-on en déduire sur z_A , z_B et $z_{B'}$.
3. Écrire une relation liant les pressions en A et B et la vitesse du fluide.
4. Écrire une relation liant les pressions en A et B et h .
5. En déduire la vitesse du fluide en fonction de g , h , ρ et ρ_f . La simplifier dans le cas où $\rho \gg \rho_f$.

3.3 Étude d'une seringue

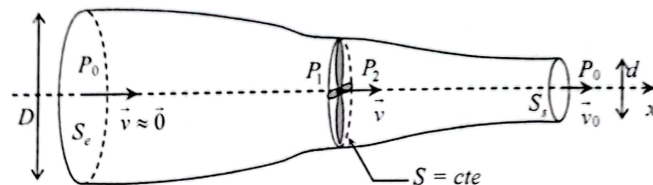
Dans une seringue, le tube a une section S et l'aiguille une section s . Le piston se déplace sans frottement à une vitesse constante V grâce à la force F axiale exercée par l'infirmière. Le liquide contenu dans la seringue est assimilé à un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ . Il sort de la seringue à la pression atmosphérique P_0 .



1. Exprimer le débit volumique D_V du liquide.
2. Exprimer la force F exercée par l'infirmière en fonction de D_V , s , S et ρ . Simplifier l'expression sachant $s \ll S$.
3. Faire l'application numérique pour : $S = 1,0 \text{ cm}^2$, $s = 1,0 \text{ mm}^2$, $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $D_V = 2,0 \text{ cm}^3.\text{s}^{-1}$.

3.4 Ventilateur d'une conduite d'aération

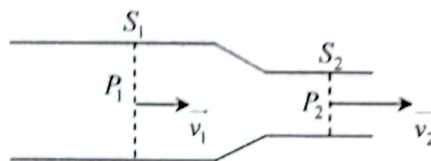
La figure ci-dessous représente le tube de courant associé à l'écoulement permanent de l'air à travers les pales d'un ventilateur en rotation uniforme autour de l'axe (Ox) d'une conduite d'aération. A l'entrée du tube de courant, la pression vaut P_0 à la sortie, la pression juste avant les pales est notée P_1 , juste après les pales P_2 . Par construction, le tube est supposé de section constante de part et d'autre des pales, la vitesse, notée $\vec{v}$, est la même à l'entrée et à la sortie des pales. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse volumique constante ρ et on néglige ici toutes les pertes liées aux frottements ou à la viscosité.



1. Justifier que la vitesse v_e à l'entrée du tube de courant soit négligeable.
2. On considère la surface de contrôle Σ comprise entre la section S_e d'entrée de la conduite et S_s de sortie.
 - (a) En dressant un bilan d'énergie cinétique durant un intervalle de temps dt sur la surface de contrôle Σ , exprimer la variation élémentaire d'énergie cinétique dE_c d'un système fermé dont on précisera la nature.
 - (b) Montrer que les puissances des forces de pression en entrée et en sortie se compensent.
 - (c) En appliquant le TEC au système fermé précédemment défini, en déduire l'expression de la puissance indiquée $\mathcal{P}_i$ du ventilateur (puissance fournie par les pales au fluide).
3. Application numérique : on donne $v_0 = 20 \text{ m.s}^{-1}$, $d = 15 \text{ cm}$ et $\rho = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$. Calculer la puissance $\mathcal{P}_i$.

3.5 Force subie par un Venturi

On considère l'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible dans une conduite horizontale d'axe (Ox), de section circulaire présentant un resserrement. Dans le cadre de l'écoulement unidimensionnel, les vitesses et les pressions sont constantes sur toute section droite de la canalisation. En amont du resserrement, on note respectivement S_1 , $\vec{v}_1$ et P_1 les valeurs de la section de la conduite, de la vitesse du fluide et de la pression loin du coude. En aval du resserrement, ces mêmes grandeurs valent S_2 , $\vec{v}_2$ et P_2 .

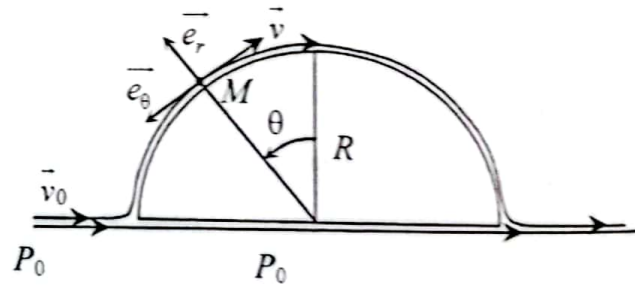


1. En s'inspirant de la méthode utilisée pour le bilan d'énergie mécanique, effectuer un bilan de quantité de mouvement. On notera $\vec{p}^*$ la quantité de mouvement d'un système fermé dont la nature sera clairement précisée. En déduire l'expression de $\frac{d\vec{p}^*}{dt}$ en fonction du débit massique D_m et des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, S_1 , S_2 , P_1 et P_2 .

2. En appliquant le PFD, en déduire la force exercée par le fluide en écoulement sur la conduite au niveau du coude en fonction du débit massique D_m et des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, S_1 , S_2 et P_1 uniquement.

3.6 Modélisation simplifiée de la portance d'une aile

Le déplacement d'un avion dans l'air crée une zone de dépression au-dessus des ailes qui permet d'expliquer la portance. Dans le cadre d'un modèle très simplifié, nous assimilerons l'aile à un demi-cylindre de rayon R et de longueur h . L'avion se déplace avec une vitesse horizontale v_0 . Dans le référentiel de l'avion, l'air a donc loin de l'avion une vitesse v_0 et la pression P_0 et nous admettrons que sur la partie inférieure de l'aile (intrados), il conserve cette vitesse et cette pression alors que sur la partie supérieure de l'aile (extrados), il a au voisinage immédiat de l'aile la vitesse $\vec{v} = -2v_0 \cos \theta \vec{e}_\theta$. L'air est assimilé à un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ . On suppose que $v_0^2 \gg gR$.



1. Déterminer la pression P en un point M de l'extrados repéré par l'angle θ .
2. Déterminer la portance F ou composante verticale de la force subie par l'aile. Pour calculer $\int \cos^3 \theta d\theta$, il est commode d'écrire $\cos^3 \theta = \cos \theta (1 - \sin^2 \theta)$.
3. Le coefficient de portance C_z est défini par : $F = \frac{1}{2} \rho S v_0^2 C_z$ où S étant la surface de référence, généralement prise égale à la surface de l'aile pour une aile profilée. Dans le cas présent, le modèle d'aile n'étant pas profilé, on adoptera pour surface de référence la surface frontale. Déterminer C_z . En réalité le coefficient C_z pour un avion est plutôt de l'ordre de 0,5.
4. Que peut-on dire de la traînée ou composante horizontale de la force subie par l'aile ? En réalité, la traînée est de l'ordre de 5% de la portance. Critiquer le modèle proposé.
5. On donne les valeurs suivantes : $R = 2,5$ m, $h = 50$ m (somme des longueurs des ailes), $\rho = 1,3$ kg.m⁻³, accélération de la pesanteur $g = 9,8$ m.s⁻², m masse de l'avion : 100 tonnes.
Déterminer la vitesse minimale v_0 permettant le décollage.

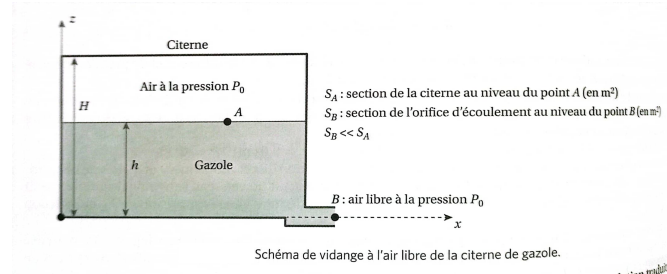
4 Bilan de puissance pour circuit hydraulique :

4.1 Citerne et réservoir de gazole

La viscosité du gazole est responsable d'une dissipation visqueuse (pertes de charge régulières et singulières) dans les conduites qui guident son écoulement. On étudie ici son influence sur la vidange d'une citerne, et sur le remplissage d'un réservoir d'une voiture.

4.1.1 Vidange d'une citerne

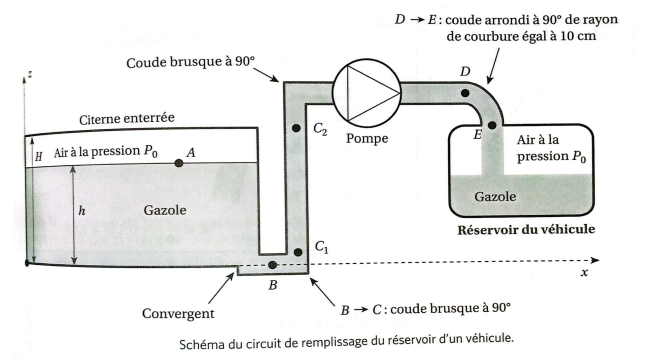
On considère une citerne de section horizontale S_A munie à sa base d'un orifice de vidange de section S_B , illustré sur la figure ci-dessous. On se place en régime quasi-stationnaire, avec $S_A \gg S_B$.



1. Énoncer la relation de Bernoulli. A quelles conditions est-elle valable ici ? Quelle autre relation traduit la conservation du débit en écoulement stationnaire ? En déduire l'expression de la vitesse V_B en sortie de la citerne.
2. La citerne étant initialement pleine, exprimer le temps T nécessaire pour la vidanger complètement : faire l'application numérique.
3. Au niveau de l'orifice convergent à la base de la citerne, la perte de charge singulière est caractérisée par un coefficient $K_c = 0,55$. Reprendre le calcul du temps de vidange en tenant compte de cette perte de charge.

4.1.2 Remplissage d'un réservoir

On utilise une pompe centrifuge pour transférer le gazole de la citerne au réservoir d'une voiture. La figure suivante modélise le circuit du fluide (la citerne étant enterrée, on a $z_E > z_A$).



Les pertes de charges singulières (dissipation due aux coudes, aux raccords entre les canalisations de diamètres différents, etc.) sont définies par $\Delta P = K \frac{1}{2} \rho V_{moy}^2$ avec K le coefficient de perte de charge, sans dimension, dépendant de la nature de la singularité rencontrée. On admettra que la pompe utilisée ici génère une perte de charge singulière de coefficient $K_{pompe} = 6$.

La perte de charge par unité de longueur d'une conduite de rayon a est :

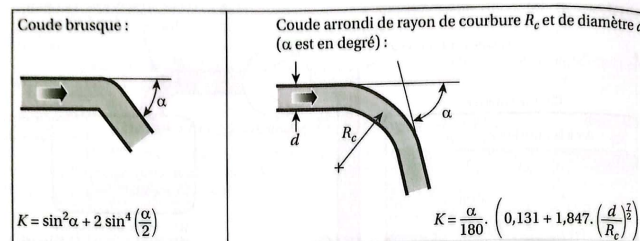
$$\frac{dP}{dl} = \xi \frac{\rho V_{moy}^2}{4a}$$

où ξ est le coefficient de friction dépendant notamment du nombre de Reynolds de l'écoulement considéré.

1. Déterminer le coefficient K_{tot} correspondant à l'ensemble des pertes de charge singulières du circuit. En déduire la valeur numérique de ces pertes. On pourra s'aider de la figure dans la partie données.
2. Evaluer le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement dans une conduite de rayon a . Pourquoi n'est-il pas possible d'utiliser ici un modèle laminaire de Poiseuille donnant $\xi = \frac{64}{Re}$? Comment peut-on alors déterminer le coefficient ξ ? La totalité des conduites droites du circuit s'étend sur approximativement $L = 10$ m. Evaluer les pertes de charges régulières du système.
3. Pour procéder au remplissage du réservoir, le circuit de gazole doit comporter une pompe lui fournissant une puissance utile P_u . En tenant compte des pertes de charge et de la pompe, établir la relation du premier principe en écoulement appliquée entre les points A et E . Sachant que la pompe a un rendement de 80%, déterminer l'expression de la puissance électrique P_e alimentant la pompe. Faire l'application numérique : on considèrera une citerne enfouie à $z_A = -5,0$ m sous l'entrée E du réservoir.

Données :

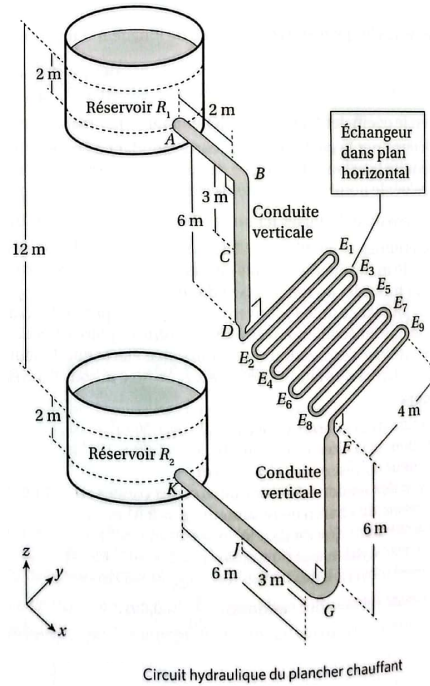
- section de la citerne au point A : $S_A = 1,00 \text{ m}^2$;
- section de la citerne au point B : $S_B = 1,00 \times 10^{-3} \text{ m}^2$;
- hauteur du réservoir : $H = 1,00 \text{ m}$;
- rayon des sections des conduites et des coudes : $a = 1,80 \text{ cm}$;
- intensité du champ de pesanteur : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$;
- masse volumique du gazole : $\rho = 840 \text{ kg.m}^{-3}$;
- viscosité dynamique du gazole : $\eta = 5 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$;
- vitesse moyenne des conduites : $V_{moy} = 4,50 \text{ m.s}^{-1}$;
- rugosité relative des conduites : $\frac{\epsilon}{2a} = 0,001$



Coefficients de pertes de charge singulières pour deux géométries de canalisation coudée.

4.2 Plancher chauffant

On s'intéresse au réseau hydraulique d'un système de plancher chauffant de bâtiment. Ce dispositif repose sur les pertes de charge de l'écoulement, dissipées sous forme de chaleur. Il se compose des éléments illustrés sur la figure :



Il est composé :

- d'un réservoir d'entrée R_1 et d'un réservoir de sortie R_2 , dont les niveaux sont maintenus constants, par exemple en étant reliés à des bassins extérieurs en terrasse ;
- d'une conduite d'amenée, ainsi qu'une conduite d'échappement, en acier soudé de rugosité relative $\epsilon_1 = 0,05$ mm et de diamètre $d_1 = 0,1$ mm ;
- d'un serpentín qui sert d'échangeur thermique coulé dans la dalle de béton à chauffer, et dans lequel se concentre la plupart des pertes de charge. Ce serpentín en acier laminé, de rugosité $\epsilon_2 = 0,1$ mm et de diamètre $d_2 = 0,05$ m comporte 10 segments horizontaux de même longueur $L = 4,0$ m, reliés par des coudes à 180° .

4.2.1 Écoulement gravitaire

Le fluide circulant dans les conduites est de l'eau, considérée comme un fluide newtonien incompressible :

- de masse volumique : $\rho = 1,0 \times 10^3$ kg.m⁻³
- de viscosité : $\eta = 1,0 \times 10^{-3}$ Pa.s ;
- et de température supposée constante T_0

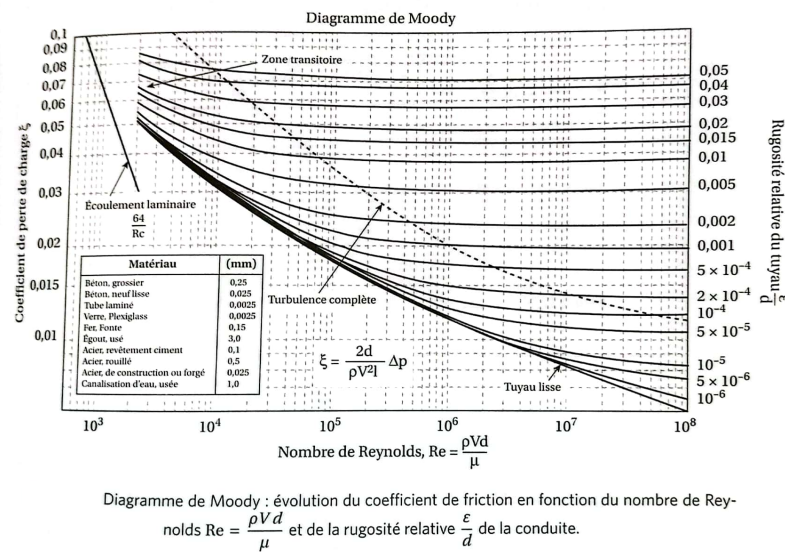
Le fluide s'écoule en régime stationnaire sous l'effet de la gravité du réservoir R_1 , dont la surface libre est à la pression $P^\circ = 1,0$ bar, vers le réservoir R_2 avec un débit volumique $D_V = 5,0$ L.s⁻¹. On suppose que les pertes de charge des tuyaux d'amenée et d'échappement sont négligeables devant celles du serpentín.

1. Calculer la pression du fluide au point C , ainsi que la vitesse moyenne v_1 dans les tuyaux d'amenée ou de sortie, et la vitesse moyenne v_2 dans le serpentín.

- Le coefficient de perte de charge singulière vaut $K = 1,5$ pour un coude, en déduire la perte de charge singulière dans le serpentin.
- Pour ce type d'écoulement, la perte de charge régulière par unité de longueur est :

$$\frac{dP}{dl} = \xi \frac{\rho v_2^2}{2d_2}$$

où ξ est le coefficient de friction, qui peut être déterminé en exploitant le diagramme de Moody de la figure ci-dessous. Calculer la perte de charge régulière dans le serpentin.

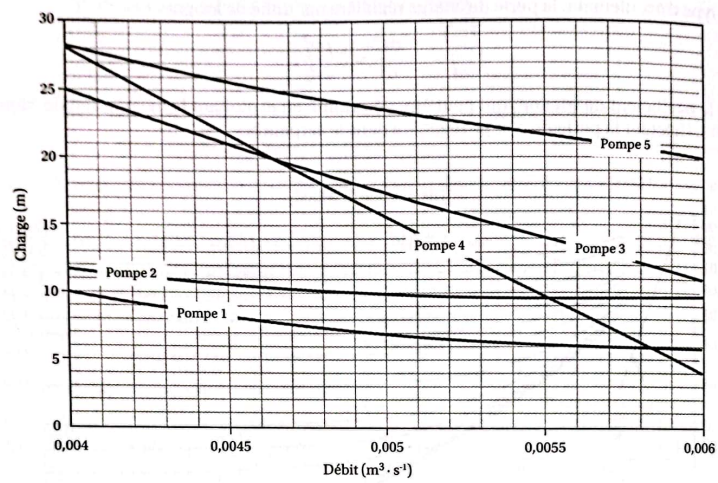


- Calculer la différence de pression (aussi appelée "charge") entre les surfaces libres des liquides dans les deux réservoirs. Montrer que cette différence de charge est dissipée par les pertes de charges régulières et singulières.

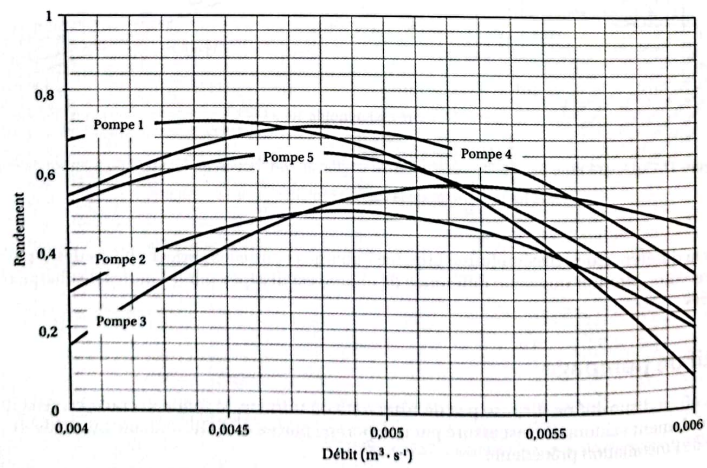
4.2.2 Dispositif de pompage

Dans le cas où ce dispositif ne dispose pas de réservoir en terrasse, le fluide d'écoule en sens inverse et le régime d'écoulement stationnaire est assuré par une pompe placée en J . On souhaite que le débit soit proche de la valeur de l'installation précédente.

- Justifiez que les pertes de charge dans le serpentin ne sont pas modifiées. En déduire la charge dont doit augmenter le fluide entre l'entrée et la sortie de la pompe. Quelle sera alors la pression à l'entrée et à la sortie de la pompe, en négligeant les pertes de charge singulières ajoutées par la pompe elle-même ?
- De quelle hauteur devrait monter le fluide pour obtenir une telle augmentation de charge ? On utilise cette unité de charge sur la figure suivante pour choisir la pompe adaptée à l'installation, en tenant compte de son rendement. Quelle(s) pompe(s) choisir ?



Caractéristique charge-débit des pompes disponibles.



Évolution du rendement des pompes disponibles en fonction de leur débit.

3. Quelle sera alors la puissance électrique consommée par cette installation ?