

TD: Énergétiques des fluides en écoulement laminaire dans une conduite

1. Calcul des forces de frottement

1.1. Force de frottement =

$$\underline{1.} \quad [F] = \underbrace{\left[\frac{\pi}{2} C_x (Re) \right]}_{=1} \times [R]^\alpha \times [v]^\gamma \times [\rho]^\lambda$$

$$n [F] = [ma] = M \cdot L \cdot T^{-2}$$

$$[R] = L$$

$$[v] = L \cdot T^{-1}$$

$$[\rho] = M \cdot L^{-3}$$

$$\text{donc } M \cdot L \cdot T^{-2} = L^\alpha \times L^\gamma \times T^{-\gamma} \times M^\lambda \times L^{-3\lambda}$$

$$\text{donc } \begin{cases} 1 = \lambda \\ -2 = -\gamma \\ 1 = \alpha + \gamma - 3\lambda \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \lambda = 1 \\ \gamma = 2 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \boxed{F = \frac{\pi}{2} C_x (Re) R^2 v^2 \rho}$$

2. si $F = 6\pi R \eta v = \frac{\pi}{2} C_x(R_e) R^2 v^2 \rho$

donc $12\eta = C_x(R_e) \times R v \rho$

donc $C_x(R_e) = 12 \times \frac{\eta}{R v \rho}$ ou $R_e = \frac{\rho v d}{2}$ avec $d = 2R$

donc $\boxed{C_x(R_e) = \frac{24}{R_e}}$ pour $R_e < 1$

3. Pour un fluide parfait, il n'y a pas de frottement visqueux
donc si la pression est identique de part
et d'autre de la sphère $\vec{F} \rightarrow \vec{0}$

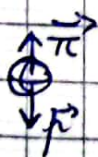
s'il y a une chute de pression du fait de la turbulence
 $C_x(R_e) \rightarrow C_x$ dès que pour $R_e \xrightarrow{2 \rightarrow 0} +\infty$

et donc $F = \frac{\pi}{2} C_x \rho R^2 v^2$ force de traînée quelconque

1.2. Équilibre d'un gaz

1. $pV = nRT \Rightarrow p \times \frac{V}{m} = \frac{n}{m} RT \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$

donc $\boxed{p_{\text{air}} = \frac{p_{\text{atm}} \times M}{RT}}$ $p_{\text{air}} =$



on $\|\vec{\pi}\| = p_{\text{air}} V \times g$ } donc $\frac{\|\vec{\pi}\|}{\|\vec{F}\|} = \frac{p_{\text{air}}}{\rho_{\text{air}}} \ll 1$
 $\|\vec{F}\| = \rho_{\text{air}} \times V \times g$

donc on peut négliger la poussée
d'Archimède devant son poids

2. (a)



système gaz
PFD : on $\frac{dv^2}{dt} = \vec{f} + \vec{F}$

donc on $\frac{dv^2}{dt} + 6\pi \eta R \vec{v} = m \vec{g}$

En régime permanent $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}}$

$$\text{donc } 6\pi\eta r \vec{v}_{\text{lim}} = m\vec{g}$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{m\vec{g}}{6\pi\eta r}}$$

$$v_{\text{lim}} = \frac{mg}{6\pi\eta r} = \frac{2r^2 \rho_{\text{huile}} g}{9\eta} =$$

2.(b)

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{\rho_{\text{huile}} \times v_{\text{lim}} \times 2r}{\eta}$$

$$\text{donc } Re = \frac{4r^3 \rho_{\text{huile}} g}{9\eta^2} =$$

Re est grand donc l'hypothèse d'écoulement laminaire est invalide.

2.(c)

$$\text{En ré-écrivant le PFD : } m \frac{dv}{dt} + K_{\text{fais}} S v^2 = mg$$

$$\text{En régime permanent } \frac{dv}{dt} = 0 \text{ et } v = v_{\text{lim}}$$

$$\text{donc } K_{\text{fais}} S v_{\text{lim}}^2 = mg$$

$$\text{donc } v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{K_{\text{fais}} S}} \quad \text{or } m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{huile}}$$

$$S = \pi r^2$$

$$\text{donc } \boxed{v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{4r \rho_{\text{huile}}}{K_{\text{fais}}}}}$$

$$\text{donc } v_{\text{lim}} =$$

$$\text{et } Re = \frac{\rho_{\text{huile}} v_{\text{lim}} \times 2r}{\eta} = \sqrt{\frac{16r^3 \rho_{\text{huile}} \rho_{\text{huile}}}{K_{\text{fais}} \eta^2}} =$$

3. $Re = \frac{4 n^3 \rho_{\text{eau}} \rho_{\text{air}} g}{5 \eta^2}$ donc $Re \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{4 n^3 \rho_{\text{eau}} \rho_{\text{air}} g}{5 \eta^2} \leq 1$$

$$\text{donc } n \leq \left(\frac{5 \eta^2}{4 \rho_{\text{eau}} \rho_{\text{air}} g} \right)^{1/3}$$

$$\text{donc } \boxed{n_{\text{max}} = \left(\frac{5 \eta^2}{4 \rho_{\text{eau}} \rho_{\text{air}} g} \right)^{1/3} =}$$

4. $Re = \left(\frac{16 n^3 \rho_{\text{eau}} \rho_{\text{air}}}{K \eta^2} \right)^{1/2}$ donc $Re \geq 2000$

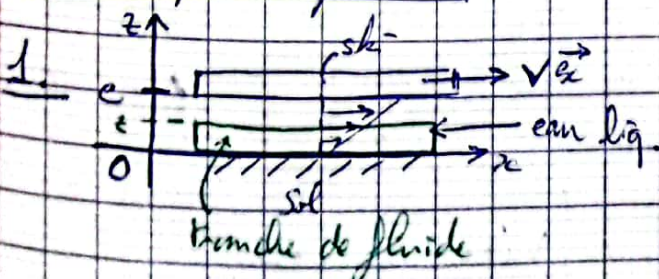
$$\Rightarrow \frac{16 n^3 \rho_{\text{eau}} \rho_{\text{air}}}{K \eta^2} \geq 4 \times 10^6$$

$$\Rightarrow n \geq \left(\frac{10^6 \times K \eta^2}{4 \rho_{\text{eau}} \rho_{\text{air}}} \right)^{1/3}$$

$$\text{donc } \boxed{n_{\text{min}} = \left(\frac{10^6 \times K \eta^2}{4 \rho_{\text{eau}} \rho_{\text{air}}} \right)^{1/3} =}$$

2. Écoulement visqueux

2.1. Le cas du pétrole



en régime permanent
 $\sum \vec{F}_{\text{ext}} \rightarrow \text{tranche de fluide} = \vec{0}$

$$\text{donc } \left(\vec{F}_{z \rightarrow z} + \vec{F}_{\text{sol} \rightarrow \text{f}} \right) \vec{e}_z = \vec{0} \cdot \vec{e}_z$$

$$\text{donc } \vec{F}_{z \rightarrow z} \cdot \vec{e}_z = \vec{F}_{\text{sol} \rightarrow \text{f}} \cdot \vec{e}_z$$

$$\text{donc } \eta \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \times S = \eta \frac{d\vec{r}(0)}{dt} \times S$$

$$\text{donc } \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(0)}{dt} = d\vec{e}$$

$$\text{donc } \vec{r}(t) = A\vec{e} + \delta$$

$$\text{or } \vec{r}(0) = 0 \quad \text{vitesse du sol}$$

$$\text{et } \vec{r}(t) = V \quad \text{vitesse du ski}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \delta = 0 \\ A\vec{e} = V \end{cases} \quad \text{donc } \boxed{\vec{r}(t) = V \frac{t}{\tau}}$$

2. Système skieur $\Rightarrow m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$

$$\text{on projette sur } \vec{e} \Rightarrow \text{on } \frac{dV}{dt} = \vec{F}_{\vec{e} \rightarrow \vec{e}} \cdot \vec{e}$$

$$\Rightarrow \text{on } \frac{dV}{dt} = - \sum_{\vec{F}_i \rightarrow \vec{e}} \cdot \vec{e}$$

$$\Rightarrow \text{on } \frac{dV}{dt} = - \eta \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \times S$$

$$\Rightarrow \text{on } \frac{dV}{dt} = - \frac{\eta S}{m} V$$

$$\Rightarrow \frac{m}{\eta S} \frac{dV}{dt} + V = 0$$

$$\text{donc } \boxed{\tau = \frac{m}{\eta S}} \quad \text{Avec } \tau =$$

$$\text{et } \boxed{V(t) = V_0 \times e^{-t/\tau}}$$

$$3. \delta W = L_{fms} \times \delta m \Rightarrow F dx = L_{fms} \times e \times \delta x.$$

$$\Rightarrow \gamma \times S \times \frac{V}{c} = L_{fms} \times e \times L \times e$$

$$\Rightarrow e^2 = \frac{\gamma S V}{L_{fms} e L}$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{\frac{\gamma S V}{L_{fms} e L}}$$

$$\text{donc } F = \gamma S \frac{V}{c} = \sqrt{L_{fms} e L \times \gamma S V}$$

$$\text{donc } \boxed{k = \sqrt{L_{fms} e L S \gamma}}$$

$$\text{donc } m \frac{dV}{dt} = -k \sqrt{V} \Rightarrow \frac{dV}{\sqrt{V}} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) \times d(V^{\frac{1}{2}}) = -\frac{k}{m} dt$$

$$\Rightarrow \sqrt{V(t)} - \sqrt{V_0} = -\frac{k}{2m} (t - 0)$$

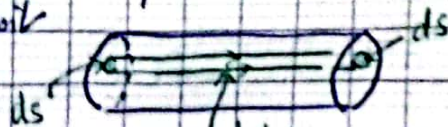
$$\Rightarrow \boxed{V(t) = V_0 \times \left(1 - \frac{kt}{2m\sqrt{V_0}}\right)^2}$$

$$V(\tau) = 0 \Rightarrow \frac{k\tau}{2m\sqrt{V_0}} = 1 \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{2m\sqrt{V_0}}{k}}$$

$\tau =$

2.2. Écoulement du sang dans une artère

1. (a) écoulement stationnaire et incompressible, donc il y a conservation du débit volumique soit un tube de courant infinitésimement étroit



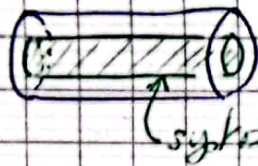
tube de courant droit en $\vec{v} // \vec{e}_z$
 $\Rightarrow$ ligne de courant droite

donc par conservation du débit volumique le long du tube de
 courant $v(r, z_1) \times dS = v(r, z_2) \times dS$
 où r et dS au tube de courant sont

donc $\boxed{v(r, z_1) = v(r, z_2)}$ v est indépendant de z

donc $\boxed{\vec{v} = v(r) \vec{e}_z}$

1.L)



en régime permanent

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\text{donc } -\pi r^2 P_1 \vec{e}_z + \pi r^2 (P_1 + \Delta P) \vec{e}_z + \eta \frac{dv}{dr} \times 2\pi r \times h \vec{e}_z = 0$$

$$\text{donc } \pi r^2 \Delta P = -2\pi r h \eta \frac{dv}{dr}$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{dv}{dr} = -\frac{r}{2} \times \frac{\Delta P}{h \eta}}$$

$$\text{donc } v(r) - v(R) = -\frac{(r^2 - R^2)}{4} \times \frac{\Delta P}{h \eta}$$

$$\text{or } v(R) = 0$$

$$\text{donc } \boxed{v(r) = \frac{\Delta P \times R^2}{4 h \eta} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)}$$

2. Écoulement incompressible donc $D_m = \rho D_v = \rho \iint_S \vec{v}(r) \cdot d\vec{S}$



$S =$ section de l'écoulement

$$\text{donc } D_m = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R v(r) \times r \, dr \, d\theta$$

$$\text{donc } D_m = 2\pi\rho \int_0^R v(r) r dr = 2\pi\rho \frac{\Delta P \times R^2}{4\eta l} \int_0^R \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r dr$$

$$\text{donc } D_m = 2\pi\rho \frac{\Delta P \times R^4}{4\eta l} \int_0^1 (1 - u^2) u du \quad \text{on pose } u = \frac{r}{R}$$

$$\text{donc } D_m = \pi\rho \frac{\Delta P \times R^4}{4\eta l} \int_0^1 (1 - u^2) du \quad \text{on pose } v = u^2 \Rightarrow dv = 2u du$$

$$\left[u - \frac{v^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } D_m = \frac{\pi}{8} \times \frac{\rho R^4}{\eta l} \Delta P$$

3.a) pour $R' = \frac{R}{2}$, $D_m' = \frac{\pi\rho\Delta P}{8\eta l} \times R'^4 = \frac{D_m}{2^4}$

$$\text{donc } D_m' = \frac{D_m}{16}$$

3.b)

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} \quad \text{avec } d = 2R$$

$$\text{et } v = v_{\text{moy}} = \frac{D_v}{\pi R^2}$$

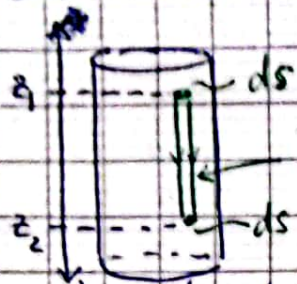
$$\text{donc } \rho v = \frac{\rho D_v}{\pi R^2} = \frac{D_m}{\pi R^2}$$

$$\text{donc } Re = \frac{2}{\pi} \times \frac{D_m}{\eta R} \quad Re =$$

2.3. Écoulement de Poiseuille vertical

1. Écoulement stationnaire et incompressible $\Rightarrow$ conservation du débit volumique

on considère un tube de courant infinitésimal élégit



tube de courant droit car $\vec{v} \parallel \vec{e}_z$

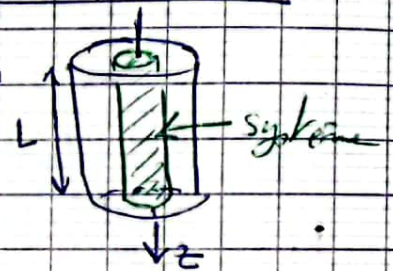
$\Rightarrow$ ligne de champ droite

par conservation du débit volumique le long du tube de courant

$$v(z_1) \times dS = v(z_2) \times dS$$

dnc $v(z_1) = v(z_2) \Rightarrow v$ indépendant de z

En régime permanent $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ sur



$$\text{dnc } mg\vec{e}_z + \pi r^2 P_1 \vec{e}_z - \pi r^2 P_2 \vec{e}_z$$

$$- \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| \times 2\pi r \times L \vec{e}_z = 0$$

$$\text{dnc } \pi r^2 \times L \times \rho g + \pi r^2 (P_1 - P_2) = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| \times 2\pi r L$$

$$\text{dnc } \left| \frac{dv}{dr} \right| = \frac{r}{2\eta} \left(\frac{P_1 - P_2}{L} + \rho g \right)$$

2. on $\frac{dv}{dr} < 0$ car vitesse max en $v(0)$ et nulle en $v(R)$

$$\text{dnc } \frac{dv}{dr} = - \frac{r}{2\eta} \left(\frac{P_1 - P_2}{L} + \rho g \right)$$

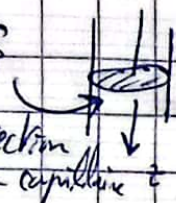
$$\text{dnc } v(r) - v(R) = - \frac{(r^2 - R^2)}{4\eta} \left(\frac{P_1 - P_2}{L} + \rho g \right)$$

on $v(R) = 0$ paroi fixe

$$\text{dnc } v(r) = \left(\frac{P_1 - P_2}{L} + \rho g \right) \times \frac{(R^2 - r^2)}{4\eta}$$

profil de vitesse parabolique

3. $D_V = \iint_{MES} \vec{v}(r) \cdot d\vec{S}$ avec S



section
de rayon r

$$D_V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R v(r) \times r dr d\theta = 2\pi \times \left(\frac{P_1 - P_2}{L} + \rho g \right) \times \frac{R^2}{4\eta} \int_0^R \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) r dr$$

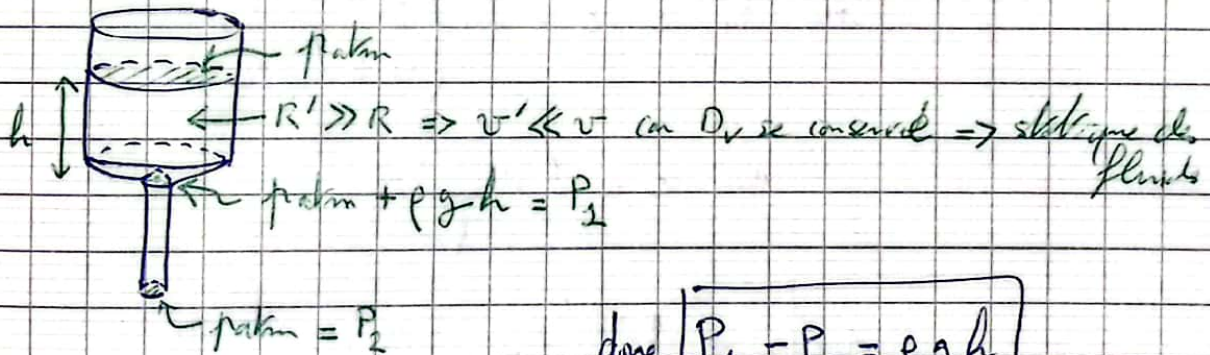
en posant $u = \left(\frac{r}{R} \right)^2$ $du = \frac{2r dr}{R^2}$

$$D_V = 2\pi \left(\frac{P_1 - P_2}{L} + \rho g \right) \times \frac{R^4}{8\eta} \int_0^1 (1-u) du$$

$$= \left[u - \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

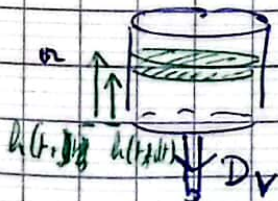
donc $D_V = \frac{\pi R^4}{8\eta} \times \left(\frac{P_1 - P_2}{L} + \rho g \right)$

4.



donc $P_1 - P_2 = \rho g h$

5. donc $D_V = \frac{\pi R^4}{8\eta} \times \rho g \left(1 + \frac{h}{L} \right)$



$$D_V = \frac{\delta V}{dt} = \frac{(h(t) - h(t+dt)) \times \pi R'^2}{dt}$$

donc $\frac{\pi R^4}{8\eta} \rho g \left(1 + \frac{h}{L} \right) = \pi R'^2 \left(-\frac{dh}{dt} \right)$

$$\text{donc } \frac{dh}{dt} + \frac{\rho g R^4}{8 \eta R'^2} \left(\frac{h}{L} + 1 \right) = 0$$

$$\text{donc } \underbrace{\frac{8 \eta R'^2 \times L}{\rho g R^4}}_{= \tau} \times \frac{dh}{dt} + h = -L$$

$$\text{donc } \boxed{\tau \frac{dh}{dt} + h = -L}$$

$$6. \quad h(t) = (h_0 + L) e^{-t/\tau} - L$$

$$\text{car } h(t_{1/2}) = \frac{h_0}{2} \quad \text{donc } (h_0 + L) e^{-t_{1/2}/\tau} - L = \frac{h_0}{2}$$

$$\text{donc } e^{-t_{1/2}/\tau} = \frac{h_0/2 + L}{h_0 + L} = \frac{1 + h_0/2L}{1 + h_0/L}$$

$$\text{donc } t_{1/2} = \tau \times \ln \left(\frac{1 + h_0/L}{1 + h_0/2L} \right)$$

$$\text{avec } \tau = 8 \eta \frac{R'^2 L}{\rho g R^4}$$

$$\text{donc } \boxed{\eta = \frac{\rho g R^4}{8 R'^2 L} \times \frac{t_{1/2}}{\ln \left(\frac{1 + h_0/L}{1 + h_0/2L} \right)}}$$

$$\eta =$$

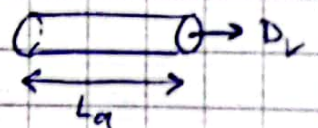
2.4. Calcul des pertes de charge

$$1. \quad \boxed{\alpha = \frac{D_v}{S} = \frac{D_v}{\pi a^2}} \quad \alpha =$$

$$D_v = \frac{\pi a^4}{8 \eta_s} \times \frac{\Delta P}{L} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Delta P = \frac{8 \eta_s L}{\pi a^4} D_v} \quad \Delta P =$$

$$\underline{2.} \quad Re = \frac{\rho v d}{\eta_s} = \frac{\rho D_v \times 2a}{\eta_s \times \pi a^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{Re = \frac{2}{\pi} \times \frac{\rho D_v}{\eta_s a}}$$

$$Re =$$

3.  en régime permanent les $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

d'où $\pi a_n^2 (P + \Delta P_n) - \pi a_n^2 P - F_{visq.} = 0$

d'où $\boxed{F_{visq.} = \pi a_n^2 \times \Delta P_n}$

$$\text{or } p = \rho g h = \pi a_n^2 \times L_n \times \rho g$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\frac{F_{visq.}}{\uparrow} = \frac{\Delta P_n}{\rho g L_n}} =$$

4. On applique le premier principe énergétique $\Delta(h + \frac{v^2}{2} + gz) = w_{in} + q$

$$\text{or } \Delta(v^2) = 0 \quad \text{pas d'accélération}$$

$$\Delta h = c_s \Delta T$$

$$\Delta(z) = 0 \quad \text{pas de variation d'altitude par suite horizontale}$$

$$w_{in} = 0 \quad \text{pas de pièce mobile d'une machine}$$

$$q = \frac{\Delta P_n}{\rho} \quad \text{perte de charge visqueuse}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\Delta T = \frac{\Delta P_n}{c_s \rho}} \quad \Delta T =$$

5. Écoulement stationnaire incompressible donc le débit volumique se conserve

$$D_v = N_a \times D_{va} = N_a' D_{va}'$$

$$\text{et } v_n = \frac{D_v}{\pi a_n^2} \quad \text{et } v_n' = \frac{D_v'}{\pi a_n'^2}$$

$$\text{donc } \boxed{N_a = \frac{D_v}{D_v'}}$$

$$N_a =$$

$$\text{et } \boxed{N_a' = \frac{D_v}{D_v'} = \frac{D_v}{\pi a_n'^2 v_n'}} \quad N_a' =$$

$$\underline{6.} \quad \left. \begin{aligned} D_v &= \frac{\pi a^4}{8 \eta_s} \times \frac{\Delta P}{L} \\ D_v' &= \frac{\pi a_n'^4}{8 \eta_s} \times \frac{\Delta P_n'}{L_n'} \end{aligned} \right\} \text{donc } N_a' = \frac{D_v}{D_v'} = \left(\frac{a}{a_n'} \right)^4 \times \frac{L_n'}{L} \times \frac{\Delta P}{\Delta P_n'}$$

$$\text{donc } \boxed{\beta = \frac{1}{N_a'} \times \left(\frac{a}{a_n'} \right)^4 \times \frac{L_n'}{L}} \quad \beta =$$

2.5. Sténose artérielle

$$\underline{1.} \quad \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \rightarrow \vec{v}(n) \quad D_v = \iint_{MES} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^R v(n) n \, dn \, d\theta$$

$$D_v = 2\pi \frac{\Delta P R^4}{4 \eta L} \times \int_0^R \left(1 - \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right) \left(\frac{n}{R} \right) d\left(\frac{n}{R} \right)$$

$$D_v = 2\pi \frac{\Delta P R^4}{4 \eta L} \times \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u) du = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{D_v = \frac{\pi}{8} \times \frac{\Delta P \times R^4}{2L}}$$

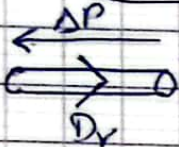
$$\text{donc } v_m = \frac{D_v}{\pi R^2} \Rightarrow \boxed{v_m = \frac{\Delta P \times R^2}{8 \eta L}} \quad v_m =$$

$$Re = \frac{\rho v d}{2} \quad \text{or } v = \frac{Q}{A} = \frac{\Delta P \times R^2}{8 \eta L} \quad \text{et } d = 2R$$

$$\text{donc } Re = \frac{\rho}{2} \times \left(\frac{\Delta P \times R^2}{8 \eta L} \right) \times 2R$$

$$\text{donc } Re = \frac{\rho \times \Delta P \times R^3}{4 \eta^2 L} \quad Re =$$

2.



ΔP analogue à la tension u
 D_v analogue au courant i

$$\frac{\Delta P}{D_v} = \frac{8 \eta L}{\pi R^4} \quad \text{analogue à la résistance } R$$

$$\text{donc } R_h = \frac{\Delta P}{D_v} = \frac{8 \eta L}{\pi R^4}$$

3. écoulement stationnaire et incompressible $\Rightarrow D_v$ se conserve
 (analogue à la loi de continuité)

$$\text{donc } D_v = \pi R^2 \times v_{\text{m}}^2 = \pi R_s^2 \times v_{s,\text{m}}^2$$

4. $P_e - P_s = P_e - P_1 + P_1 - P_2 + P_2 - P_s$ (analogue à la loi de Kirchhoff)

$$\frac{P_e - P_s}{D_v} = \left(\frac{P_e - P_1}{D_v} + \frac{P_1 - P_2}{D_v} + \frac{P_2 - P_s}{D_v} \right)$$

$$R_{h,\text{tot}} = R_{h,1} + R_{h,2} + R_{h,3} \quad (\text{résistance en série})$$

$$\text{donc } P_1 - P_2 = R_{h,2} \times D_v = R_{h,2} \times \frac{P_e - P_s}{R_{h,1} + R_{h,2} + R_{h,3}}$$

$$\text{donc } P_1 - P_2 = \frac{R_{h,2}}{R_{h,1} + R_{h,2} + R_{h,3}} (P_e - P_s) \quad (\text{pont diviseur})$$

$$\underline{5.} \quad R_{h1} = R_{h3} = \frac{8\eta L}{\pi R^4} =$$

$$R_{h2} = \frac{8\eta L_s}{\pi R_s^4} =$$

$$R_{h_{tot}} = R_{h1} + R_{h3} + R_{h2} =$$

$$D_v = \frac{\Delta P}{R_{h_{tot}}} =$$

$$v = \frac{D_v}{\pi R^2} =$$

$$v_s = \frac{D_v}{\pi R_s^2} =$$

$$Re = \frac{2\rho v R}{\eta} =$$

$$Re_s = \frac{2\rho v_s R_s}{\eta} =$$

6.