

### 3. Exploitation de la relation de Bernoulli :

#### 3.1. Étude d'un siphon

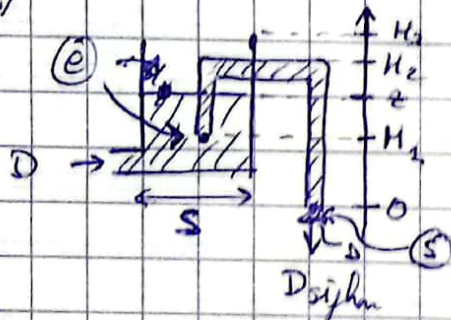
1. Étude d'un siphon :
- ① le réservoir se remplit jusqu'à  $H_2$
  - ② à partir de ce moment la vidange se met en place

soit elle ne fonctionne pas  
et le réservoir continue  
à se remplir

soit elle fonctionne  
et le réservoir se vide

le début de vidange dépend  
du niveau du réservoir d'où la  
distinction de cas.

Supposons le siphon amorcé :



Fluide parfait incompressible  $\Rightarrow$  appliquons la relation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie ① et ② du siphon

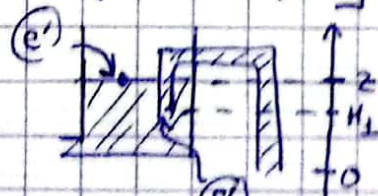
$$\frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + g H_1 = \frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + 0$$

La section  $s$  du tube est la même à l'entrée et la sortie du tube

donc  $s v_e = s v_s$  par conservation du débit volumique

donc  $v_e = v_s$  donc  $p_e + \rho g H_1 = p_s$

Appliquons la relation de Bernoulli entre ① et ②



$$\text{donc } \frac{p_{e'}}{\rho} + \frac{1}{2} v_{e'}^2 + g z = \frac{p_{s'}}{\rho} + \frac{1}{2} v_{s'}^2 + g H_1$$

on par conservation du débit volumique  $D + s v_{e'} = s v_{s'}$  or  $s \gg s'$   
donc  $v_{e'} \ll v_{s'}$

donc  $\frac{p_e'}{\rho} + gz = \frac{p_s'}{\rho} + \frac{1}{2} v_s'^2 + gH_1$  or  $\frac{p_e'}{\rho} + gH_1 = \frac{p_s'}{\rho}$

et  $p_e' = p_s$  et  $v_s' = v_s$

donc  $gz = \frac{1}{2} v_s^2$

donc  $v_s = \sqrt{2gz}$

donc  $D_{siphon} = s v_s = s \sqrt{2gz}$

ainsi si  $D < D_1 = s \sqrt{2gH_1}$ , le siphon vide le récipient jusqu'à  $z = H_1$   
donc le niveau oscille entre  
 $z = H_2$  (arrasage) et  $z = H_1$  fin de vidange

si  $D_1 < D < D_2 = s \sqrt{2gH_2}$ , le siphon stabilise le  
niveau du récipient à  
la hauteur  $z = \frac{1}{2g} \left( \frac{D}{s} \right)^2$

qui est comprise entre  $H_1$  et  $H_2$   
après avoir été arrasé

si  $D_2 < D < D_3 = s \sqrt{2gH_3}$ ,

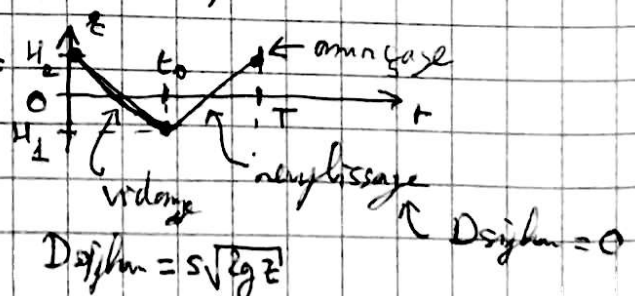
idem le siphon stabilise le niveau  
du récipient à la hauteur

$$z = \frac{1}{2g} \left( \frac{D}{s} \right)^2$$

qui est entre  $H_2$  et  $H_3$

si  $D_3 < D$ , alors le récipient se remplit jusqu'à débordement  
le siphon ne suffit pas à compenser  $D$   
car  $D_{siphon} \leq D_3 < D$ .

2. pour  $D < D_1 = 2 \text{ phases}$



$$\text{vidange} = D + S v_e = D_{\text{cylind}} = s \sqrt{2gz} \quad \text{or } v_e = - \frac{dz}{dt}$$

$$\text{donc } S \frac{dz}{dt} + s \sqrt{2gz} = D$$

$$\text{donc } \frac{S}{s \sqrt{2gH_1}} \times \frac{dz}{dt} + \sqrt{\frac{z}{H_1}} = \frac{D}{s \sqrt{2gH_1}}$$

$$\text{donc } \frac{S \cdot H_1}{D_1} \times \frac{d(z/H_1)}{dt} + \sqrt{\frac{z}{H_1}} = \frac{D}{D_1}$$

$$\text{donc } \frac{S H_1}{D_1} \times \frac{d(z/H_1)}{dt} = \frac{D}{D_1} - \sqrt{\frac{z}{H_1}}$$

$$\text{donc } \frac{S H_1}{D_1} \times \frac{d(z/H_1)}{\frac{D}{D_1} - \sqrt{\frac{z}{H_1}}} = dt$$

$$\text{donc } \frac{S H_1}{D_1} \times \int_{H_2/H_1}^1 \frac{du}{\frac{D}{D_1} - \sqrt{u}} = \int_0^{t_0} dt = t_0$$

$$\text{donc } t_0 = \frac{S H_1}{D} \int_1^{H_2/H_1} \frac{du}{\sqrt{u} - D/D_1}$$

$$\text{amplissage} = D + S v_e = 0 \quad \text{or } v_e = - \frac{dz}{dt}$$

$$\text{donc } \frac{dz}{dt} = \frac{D}{S}$$

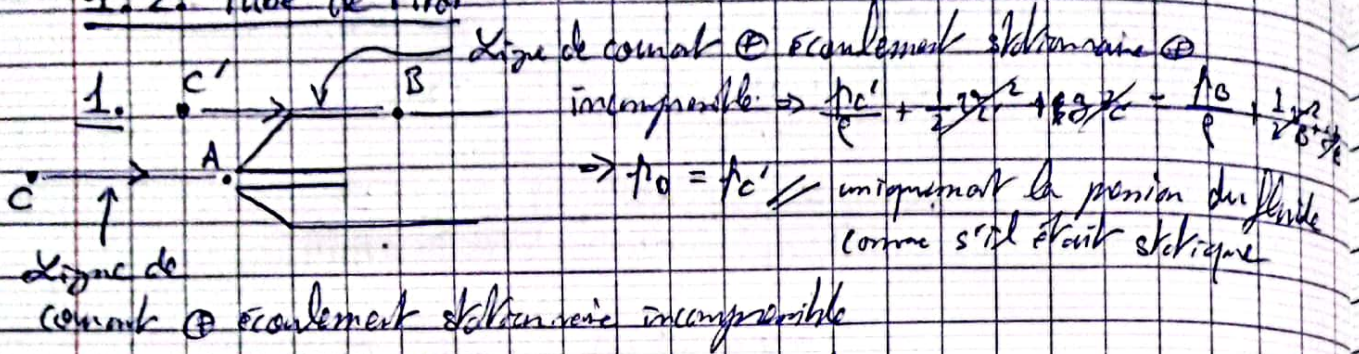
$$\text{donc } dt = \frac{S}{D} dz$$

$$\text{donc } \int_{t_0}^T dt = \int_{H_1}^{H_2} \frac{S}{D} dz$$

$$\text{donc } T - t_0 = \frac{S}{D} (H_2 - H_1)$$

$$\text{donc } T = \frac{S}{D} \left[ H_2 + H_1 \left( \int_1^{H_2/H_1} \frac{du}{\sqrt{u} - D/D_1} - 1 \right) \right]$$

## 1.2. Tube de Pitot



incompressible  $\Rightarrow \frac{p_C}{\rho} + \frac{1}{2} v_C^2 + g z_C = \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2} v_B^2 + g z_B$

$\Rightarrow p_0 = p_C$  uniquement la pression du fluide comme s'il était statique

$$\Rightarrow \frac{p_C}{\rho} + \frac{1}{2} v_C^2 + g z_C = \frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2} v_A^2 + g z_A$$

$= \frac{1}{2} v^2$        $\uparrow$        $= 0$  car A point d'arrêt  $v_A = 0$

car  $z_C = z_A$

donc  $p_A = p_C + \frac{1}{2} \rho v^2$

pression qui comprend aussi l'effet cinétique

2.  $z_A, z_B$  et  $z_{B'}$  on des valeurs proches

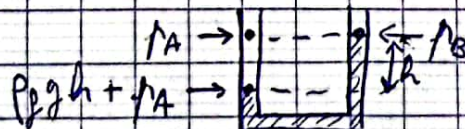
telles que  $g \Delta z$  est négligeable devant  $\frac{1}{2} v^2$  et les autres pressions

$$\frac{p}{\rho}$$

3.  $p_A = p_C + \frac{1}{2} \rho v^2$  } on  $z_C - z_C = z_B - z_A$  négligeable  
et  $p_B = p_C$  } donc  $p_C = p_C$

donc  $p_A = p_B + \frac{1}{2} \rho v^2$

4. on retrouve la pression  $p_A$  et  $p_B$  au niveau du liquide



comme le liquide est statique  $\Rightarrow$  en statique de fluide

$p_B + \rho g h = p_A + \rho g h$

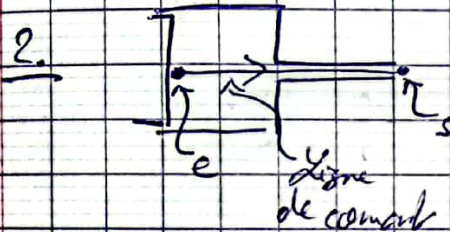
5. donc  $p_0 + \rho g h = \left( p_s + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \rho g h$

donc  $(p - p_s) g h = \frac{1}{2} \rho v^2$

donc  $\boxed{v = \sqrt{2 \left( 1 - \frac{\rho_s}{\rho} \right) g h}}$   $\approx \sqrt{2 g h}$   
si  $\rho_s \ll \rho$ .

### 1.3. Étude d'une seringue

1. Le piston se déplace à  $V$  donc la vitesse d'écoulement dans le tube est  $V$   
 fluide parfait  $\Rightarrow$  écoulement homogène (stationnaire)  
 donc  $\underline{D_v = S \times V}$



écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide parfait  $\Rightarrow$  relation de Bernoulli

donc  $\frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + g z_e = \frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + g z_s$

or  $z_e = z_s$

$v_e = V = \frac{D_v}{S}$  et  $p_e \times S = F$

et  $v_s = \frac{D_v}{s}$  et  $p_s = P_0$

donc  $\frac{F}{\rho S} + \frac{1}{2} \left( \frac{D_v}{S} \right)^2 = \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} \left( \frac{D_v}{s} \right)^2$

donc  $\boxed{F = P_0 S + \frac{1}{2} \rho S \left( \frac{D_v}{s} \right)^2 \times \left( 1 - \left( \frac{s}{S} \right)^2 \right)}$

si  $s \ll S$  alors  $\boxed{F \approx P_0 S + \frac{1}{2} \rho S \left( \frac{D_v}{s} \right)^2}$

3.

# 1. 4. Ventilatorem dans une conduite d'aération

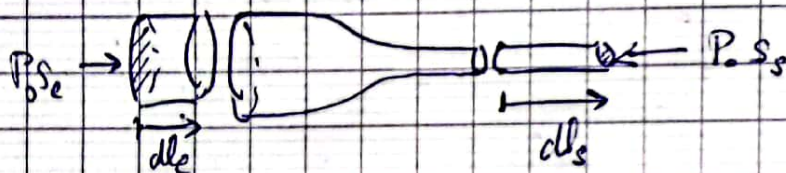
1. Écoulement stationnaire et incompressible ( $\rho$  uniforme) dans  $D_v$  se conserve

donc  $S_e v_e = S_s v_s$  donc  $v_e \ll v_s$  or  $S_e \gg S_s$   
 soit  $D \gg d$

2. (a) Système fermé  $\Sigma_f = \Sigma +$  le fluide entrant à  $t$   
 $= \Sigma +$  le fluide qui est sorti à  $t+dt$

donc  $dE_{c,\Sigma_f} = \delta W_{\text{pression}} + \delta W_{\text{ventilateur}}$

2. (b)  $\delta W_{\text{pression}} = +P_0 \times S_e \times dl_e - P_0 \times S_s \times dl_s$



donc  $\delta W_{\text{pression}} = P_0 \times (S_e - S_s)$

or  $D_v = \frac{S_e v_e}{dt} = \frac{S_s v_s}{dt}$  par conservation du débit volumique donc  
 $S_e v_e = S_s v_s$

donc  $\delta W_{\text{pression}} = 0$

2. (c) donc  $dE_{c,\Sigma_f} = \delta W_{\text{ventilateur}}$

or  $dE_{c,\Sigma_f} = \delta E_{c,\text{sortie}} - \delta E_{c,\text{entrée}} = S_m \times \left( \frac{1}{2} v_s^2 - 0 \right)$

$dE_{c,\Sigma_f} = \rho \delta V \times \frac{1}{2} v_s^2$

et  $\delta W_{\text{ventilateur}} = P_i \times dt$  donc  $\rho \delta V \times \frac{1}{2} v_s^2 = P_i \times dt$

donc  $P_i = \frac{1}{2} \rho v_s^2 \times \frac{\delta V}{dt} = \frac{1}{2} \rho v_s^2 D_v$

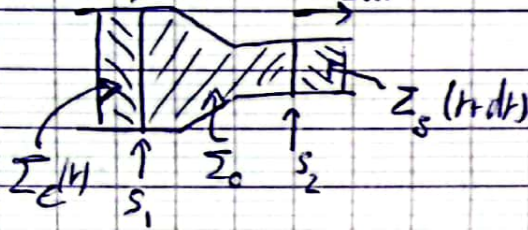
or  $D_v = \pi \frac{d^2}{4} v_0$

donc  $P_1 = \frac{\pi}{8} \rho v_0^3 d^2$

3.

### 1.5. Force subie par un Vortex

1. Systeme fermé  $= \Sigma_0 + \Sigma_e(t) = \Sigma_0 + \Sigma_s(t+dt) = \Sigma_f$



Si système fermé  $\Rightarrow$  PFD  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{ext}$

on écoulement stationnaire donc  $d\vec{p}_{\Sigma_f} = \delta \vec{p}_{\Sigma_s} - \delta \vec{p}_{\Sigma_e}$   
 $= \delta m \times \vec{v}_2 - \delta m \vec{v}_1$

donc  $\frac{\delta m}{dt} \vec{v}_2 - \frac{\delta m}{dt} \vec{v}_1 = \Sigma \vec{F}_{ext}$

donc  $D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \Sigma \vec{F}_{ext}$

or  $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{pression_1} + \vec{F}_{pression_2} + \vec{F}_{poids}$

or  $\vec{F}_{pression_1} = P_1 \times S_1 \times \vec{e}_x$  et  $\vec{F}_{pression_2} = -P_2 S_2 \vec{e}_x$

donc  $D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = (P_1 S_1 - P_2 S_2) \vec{e}_x + \vec{F}_{poids}$

2. donc  $\vec{F}_{poids} = \Delta (D_m \vec{v} + P S \vec{e}_x)$

pour éliminer  $P_2$  on applique Bernoulli  $\frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 + g \frac{z_2}{2} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 + g \frac{z_1}{2}$   
 (à  $z_1 = z_2$ )

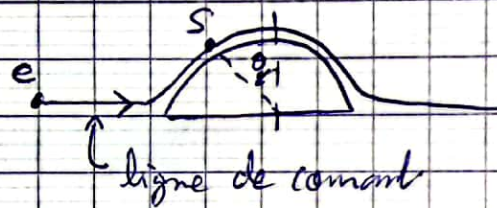
$$\text{donc } P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{F}_{\text{induite} \rightarrow \text{eau}} = D_{\text{am}} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + P_1 (S_2 - S_1) \vec{e}_z + \frac{1}{2} \rho S (v_1^2 - v_2^2) \vec{e}_z}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{écoulet} \rightarrow \text{écoulet}} = - \vec{F}_{\text{écoulet} \rightarrow \text{écoulet}}}$$

## 1.6. Modélisation simplifiée de la portance d'une aile

1. écoulement stationnaire incompressible d'un fluide  
 $\Rightarrow$  on applique la relation de Bernoulli



$$\text{donc } \frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + g z_e = \frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + g z_s$$

$$\text{on } p_e = P_0, v_e = v_0, z_s - z_e = R \cos \theta \text{ et } v_s = 2v_0 \cos \theta \text{ et } P = p$$

$$\text{donc } \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{P}{\rho} + 2 v_0^2 \cos^2 \theta + g R \cos \theta$$

$$\text{donc } \boxed{P = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 (1 - 4 \cos^2 \theta) - \rho g R \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \underline{2.} \quad F &= \iint_{\Gamma \in S} -p(n) d\vec{S} \cdot \vec{e}_z = \underbrace{\iint_{\Gamma \in \text{intale}} -p(n) d\vec{S} \cdot \vec{e}_z}_{= P_0 \times 2R \times h} + \underbrace{\iint_{\Gamma \in \text{extale}} -p(n) d\vec{S} \cdot \vec{e}_z}_{= h \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -P(\theta) \cos \theta \times R d\theta} \\ &= P_0 \times 2R \times h - h \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(\theta) \cos \theta \times R d\theta \end{aligned}$$

$$\text{donc } F = 2RhP_0 - Rh \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta P(\theta) d\theta$$

$$\text{or } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \left[ \sin\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-1 - \sin^2\theta) \cos\theta d\theta = \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$\begin{cases} u = \sin\theta \\ du = \cos\theta d\theta \end{cases}$

et on néglige le terme en  $\rho g R \cos\theta$  devant celui en  $\frac{1}{2} \rho v_0^2$  car  $gR \ll v_0^2$

$$\text{donc } F = 2RhP_0 - Rh \times \left[ 2P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left( 2 - 4 \times \frac{4}{3} \right) \right]$$

$$\boxed{F = \frac{5}{3} \rho R h v_0^2}$$

3. surface frontale  $S = R \times h$  donc  $F = \frac{5}{3} \rho S v_0^2 = \frac{1}{2} \rho S v_0^2 C_z$

donc  $\boxed{C_z = \frac{10}{3}}$

4. Dans ce modèle les forces de pression sont significatives par rapport à la direction horizontale



et fluide parfait  $\Rightarrow$  pas de force de viscosité

donc il n'y a pas de force de traînée

Derrière une aile il y a un sillage turbulent qui provoque une asymétrie de la pression d'où la force de traînée

5. Il y a décollement si  $F = mg \Rightarrow \frac{5}{3} \rho R h v_0^2 = mg$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{3}{5} \times \frac{mg}{\rho R h}}} \quad v_0 =$$