

Travaux dirigés du chapitre : 3.1. Expression différentielle des principes de la thermodynamique

Partie : 3. Thermodynamique des fluides appliquées aux machines thermiques

1 Calcul d'échelles

1.1 Mesurer l'échelle microscopique

1. Évaluer le nombre de molécules et la distance moyenne entre deux molécules présentes dans un volume $V = 1\text{mm}^3$ de vapeur d'eau à pression et température ambiante.
2. Comparer ces résultats au cas des molécules dans un verre d'eau. Discuter.

1.2 Modèle d'un gaz de sphères dures

On modélise un gaz réel par un gaz de N sphères dures apolaires, de rayon r , dans une enceinte de volume $V = 1\text{mm}^3$. L'équation d'état qui décrit ce gaz à l'équilibre est $P(V - Nb) = nRT$, où b est le covolume particulaire (ou volume exclu) du gaz, c'est-à-dire le volume rendu inaccessible par la présence de N sphères impénétrables réalisant entre elles des chocs élastiques.

1. Déterminer une expression du covolume total Nb en fonction de r . On supposera que seules des collisions à deux corps ont lieu.
2. On estime qu'un écart de 1% du volume accessible, comparé au volume de l'enceinte, est suffisant pour déceler le caractère non parfait d'un tel gaz. On s'intéresse au cas de la vapeur d'eau : proposer une estimation du nombre N^* de particules dans l'enceinte à partir duquel on peut considérer que ce gaz n'est manifestement pas parfait. A quelle pression P^* cela correspond-il ? Discuter.

2 Détermination de grandeurs thermodynamiques

2.1 Évolution d'un gaz parfait

On met en contact une mole de diazote ($\gamma = 7/5$), initialement à la température T_1 , avec le milieu extérieur dont la température est T_0 et la pression P_0 . On rappelle pour un gaz parfait

$$C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}.$$

1. Déterminer la variation de son entropie.
2. Application numérique : $T_1 = 600\text{K}$, $T_0 = 300\text{K}$ et $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
3. Déterminer la variation de son enthalpie libre (on notera S_1 l'entropie initiale du gaz).

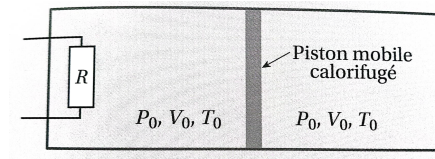
2.2 Chauffage par une résistance

Pour étudier le fonctionnement d'une bouilloire électrique, on considère une masse $m_e = 500\text{g}$ d'eau dans laquelle plonge un conducteur de résistance $R = 20\ \Omega$. Celui-ci est parcouru par un courant d'intensité $i = 10\text{A}$ pendant une durée $\Delta t = 1\text{min}$. On note (Σ) le système formé de l'eau et du conducteur. On donne la masse du conducteur : $m_c = 19\text{g}$, la capacité thermique massique du conducteur : $c_c = 0,42\ \text{J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et la capacité thermique massique de l'eau : $c_e = 4,18\ \text{J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

1. La température de l'ensemble est maintenue constante à $T_0 = 20\ ^\circ\text{C}$. Exprimer la variation d'entropie de (Σ) , puis l'entropie créée. Effectuer les applications numériques et préciser la cause de création d'entropie.
2. Le même courant passe dans le conducteur pendant la même durée mais maintenant, le système (Σ) est isolé thermiquement. Calculer la variation d'entropie de (Σ) et l'entropie créée. Préciser la cause de création d'entropie.

2.3 Calculer un travail et un transfert thermique

Un cylindre horizontal à parois calorifugées est séparé en deux compartiments par un piston calorifugé et mobile sans frottement représenté ci-dessous :



Chacun des compartiments contient une mole de gaz parfait monoatomique, initialement dans les mêmes conditions P_0, V_0, T_0 . Le compartiment 1 contient une résistance électrique qui chauffe très lentement le gaz jusqu'à ce que la pression régnant dans le compartiment 1 ait doublé.

1. Caractériser l'état d'équilibre final en déterminant P, T et V dans chaque compartiment.
2. En déduire le transfert thermique total Q_1 cédée par la résistance, par deux méthodes différentes.

3 Systèmes thermodynamiques variables

3.1 Oscillations d'un piston

Un cylindre d'axe horizontal est posé sur le sol. Il est calorifugé et fermé par un piston également calorifugé, de section S , de masse m , et qui peut se mouvoir horizontalement sans frottement. Au repos, le cylindre de longueur L_0 contient un gaz parfait à la température T_0 . La pression extérieure vaut P_{atm} .

1. On écarte très peu le piston de sa position d'équilibre, puis on le lâche : déterminer la période de ses oscillations. On discutera les hypothèses utilisées.

3.2 Pseudo-sources de températures variables

Une centrale thermique cyclique produit de l'électricité en fournissant du travail mécanique à un alternateur. Cette centrale thermique fonctionne de façon réversible entre deux pseudo-sources de chaleur constituées de réservoir liquides de température variables $T_C(t)$ et $T_F(t)$. Ces pseudo-sources ont la même capacité thermique $C = 100 \text{ kJ.K}^{-1}$ et leurs températures initiales sont respectivement $T_{Co} = 400 \text{ K}$ et $T_{Fo} = 300 \text{ K}$.

1. A partir du second principe de la thermodynamique, montrer que le produit $T_C(t) \times T_F(t)$ est égal à une constante à déterminer.
2. A quelle condition sur les températures des deux sources la centrale cesse-t-elle de fonctionner ? En déduire la température finale T_{finale} .
3. Déterminer le travail total fourni par la centrale pendant son fonctionnement, ainsi que son rendement, à comparer au rendement de Carnot. A quelles conditions pourrait-on obtenir ce rendement ? Discuter.

3.3 Quinze minutes de climatisation

En entrant dans un amphithéâtre, une personne allume un climatiseur, qui fait passer la température de la salle de 27°C à 22°C en 1000 secondes. Le climatiseur est en relation avec l'atmosphère extérieure à 27°C . Un compresseur lui fournit une puissance de 180 W et on suppose que son fonctionnement est réversible.

1. Déterminer la capacité thermique C de la salle climatisée. Estimer le nombre de places assises dans l'amphithéâtre.
2. Une fois l'amphithéâtre rafraîchi, 800 étudiants viennent occuper les sièges. Combien de systèmes de climatisation identiques au précédent faut-il allumer pour maintenir la température à 22°C ? On considère qu'un adulte dégage une puissance d'environ 50 W .

3.4 Complexe sportif patinoire-piscine

On cherche à calculer le temps de montée en température d'un complexe patinoire-piscine lié au fonctionnement d'une pompe à chaleur. En régime stationnaire, la masse d'eau de la piscine $m_1 = 2,00 \times 10^6 \text{ kg}$ est à la température de consigne $T_1 = 300,0 \text{ K}$, tandis que la masse d'eau $m_2 = 2,50 \times 10^5 \text{ kg}$ de la patinoire est à la température $T_2 = 263,0 \text{ K}$.

1. Déterminer les capacités thermiques respectives C_1 , C_2 et C'_2 des masses d'eau de la piscine, de l'eau sous phase liquide de la patinoire, et de l'eau sous phase solide de la patinoire.
2. On considère une pompe à chaleur fonctionnant de manière réversible entre les deux pseudo-thermostats formés par les masses d'eau m_1 et m_2 . Initialement, les deux masses d'eau (liquide) sont à la même température T_i . Est-ce la source chaude ou la source froide qui doit être chauffée ?

Quelle est la masse d'eau dont la température variera le plus vite au démarrage de la pompe à chaleur ?

3. (a) Les deux masses d'eau restent liquides : à la date t , l'eau de la piscine est à la température T'_1 , celle de la patinoire à T'_2 . Établir l'équation différentielle vérifiée par T'_1 et T'_2 et l'intégrer entre l'instant initial et la date t .
- (b) Exprimer en fonction de C_1 , C_2 , T_i et T_0 , la température T_3 de l'eau de la piscine lorsque la température de l'eau totalement liquide de la patinoire est $T_0 = 0^\circ \text{C}$.

- (c) Exprimer l'énergie mécanique W_1 reçue par le fluide caloporteur de la pompe à chaleur. Préciser le sens de l'échange. Applications numériques : $T_i = 280,0$ K.
4. (a) L'eau de la patinoire se transforme en glace : exprimer en fonction de C_1 , T_0 , T_3 , L et m_2 la température T_4 de l'eau de la piscine lorsque toute l'eau de la patinoire est sous forme de glace à T_0 .
- (b) Exprimer l'énergie W_2 reçue par le fluide caloporteur pour réaliser complètement la transition de phase. Préciser le sens de l'échange. Applications numériques.
5. (a) La glace de la patinoire se refroidit, tandis que l'eau de la piscine chauffe. Exprimer en fonction de C_1 , C'_2 , T_2 , T_0 et T_4 la température T_5 de l'eau de la piscine lorsque l'eau de la patinoire est sous forme de glace à $T_2 = 263,0$ K. Exprimer l'énergie W_3 échangée pour atteindre ainsi T_2 . Préciser le sens de l'échange. Applications numériques.
- (b) Exprimer en fonction de C_1 , T_1 et T_5 , l'énergie W_4 qu'il faut fournir à l'eau de la piscine pour élever la température par chauffage direct de T_5 à T_1 . Application numérique.
6. Le compresseur de la pompe à chaleur fournit au fluide caloporteur une puissance constante $P = 200$ kW. Au bout de combien de temps (en jour, heures, minutes) la montée en température du complexe sportif atteint-elle son état de consigne ?

Données :

- capacité thermique de l'eau liquide : $c_1 = 4,18$ kJ.K⁻¹.kg⁻¹ ;
- capacité thermique de la glace : $c_2 = 2,09$ kJ.K⁻¹.kg⁻¹ ;
- enthalpie de fusion de la glace à 0 °C : $L = 334$ kJ.kg⁻¹

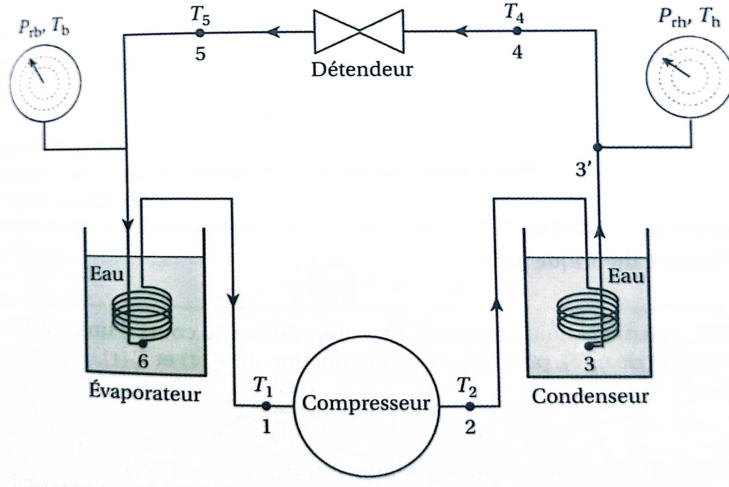
4 Problèmes

4.1 Pompe à chaleur expérimentale

Dans le contexte de réchauffement climatique, l'efficacité des pompes à chaleur (supérieur à l'unité) incite de plus en plus les particuliers et les institutions à les utiliser en lieu et place des radiateurs électriques. On étudie ici une pompe à chaleur didactique, dont le fluide HFC (composé hydrofluorocarbures) est référencé R134a.

Dans le dispositif présenté, le fluide R134a s'écoule dans un tuyau de cuivre subissant des transformations cycliques. Sous forme gazeuse à la sortie du compresseur (point 2), il subit une liquéfaction au niveau du condenseur : le tuyau de cuivre y prend la forme d'un serpentín plongé dans le scean de droite contenant une masse d'eau m_e (point 3). Le liquide subit ensuite une détente au niveau du détendeur (évolution de 4 à 5) avant de se vaporiser complètement au niveau de l'évaporateur : le tuyau de cuivre y prend la forme d'un serpentín plongé dans le scean de gauche contenant également une masse d'eau m_e (point 6). Il retourne à nouveau dans le compresseur (point 1) poursuivre un nouveau cycle. Ces transformations sont supposées réversibles pour le fluide caloporteur.

On dispose de deux manomètres (basse pression et haute pression) procédant à une mesure de pression relative (P_{rb} et P_{rh}). Ces manomètres présentent une double graduation pression et température.



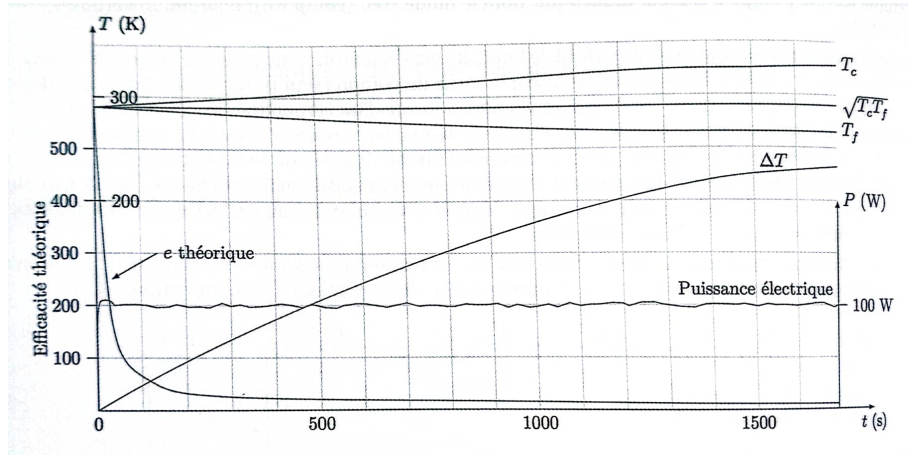
On utilise un système d'expérimentation assisté par ordinateur, afin de suivre l'évolution des températures T_i aux différents points et de la puissance P consommée par le compresseur. On constate que les températures des sources, constituées par les sceaux d'eau, varient au cours de l'expérience. A la date $t = 0$, on met en marche la pompe à chaleur alors que les deux sceaux contiennent chacun $m_e = 4$ kg d'eau à la même température θ_0 .

On note c_e la capacité thermique massique de l'eau.

1. (a) Appliquer le premier principe au fluide R134a pour un cycle infinitésimal.
(b) Appliquer le second principe au fluide R134a pour un cycle infinitésimal.
2. (a) Exprimer le transfert thermique élémentaire δQ_f reçu par le fluide de la part de la source froide en fonction de m_e , c_e , dT_f , où dT_f est la variation élémentaire de température de la source froide.
(b) Exprimer de même δQ_c en fonction de dT_c . En déduire la relation :

$$\frac{dT_f}{T_f} + \frac{dT_c}{T_c} = 0$$

3. Lors de l'expérience, on obtient, avec $\theta_0 = 17$ °C la température initiale commune aux deux sceaux, les tracés :



- (a) Commenter l'allure des trois courbes du haut donnant les variations de $T_c(t)$, $T_f(t)$ et $\sqrt{T_c(t)T_f(t)}$. On commentera avec soin l'allure de cette dernière courbe.
- (b) Pour $t > 1500$ s, on observe que la température T_f ne varie plus. Quel phénomène se produit-il à partir de cette date ? Proposer une expression pour le transfert thermique infinitésimal δQ_f pour $t > 1500$ s. Le candidat pourra introduire une ou plusieurs grandeurs qu'il définira soigneusement. La température T_c évolue-t-elle pour $t > 1500$ s ?
4. On se place à $t < 1500$ s.
On définit une efficacité théorique par :

$$\eta_t = \left| \frac{\delta Q_c}{\delta W} \right|$$

où δW est le travail reçu par le fluide de la part du compresseur au cours d'un cycle infinitésimal.

- (a) Justifier la définition de $\eta_t(t)$, puis l'exprimer en fonction de $T_c(t)$ et $T_f(t)$.
- (b) En déduire que :

$$\eta_t = \frac{T_c^2}{T_c^2 - T_0^2}$$

où T_0 est la température initiale des deux pseudo-sources.

- (c) En exprimant $\Delta T = T_c - T_f$, on peut montrer que l'efficacité théorique η_t , de la pompe à chaleur s'écrit :

$$\eta_t = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{T_0}{\Delta T} \right)^2}$$

Commenter cette expression. La courbe e théorique des tracés est-elle en accord avec cette expression ?

4.2 Étonnant Soleil

"Une étoile comme le Soleil rayonne régulièrement, tant que son carburant nucléaire n'est pas épuisé. Pourtant, si son énergie variait dans le même sens que sa température, comme il semble raisonnable de le supposer, elle serait instable : elle ne pourrait qu'avorter ou exploser. En réalité, sa capacité calorifique est négative en raison de l'attraction gravitationnelle entre ses constituants ; c'est ce qui assure la permanence et la stabilité de son rayonnement".

Pour rendre compte de ce comportement étonnant expliqué par Roger Balian, considérons que l'énergie totale E du Soleil se décompose en deux réservoirs : l'énergie interne U et l'énergie potentielle de gravitation E_G . L'énergie stockée au cœur du Soleil dans les noyaux d'hydrogène et d'hélium est ici considérée comme une source de transfert thermique due à la fusion nucléaire, dont la puissance est notée P_Q . D'autre part, l'astre rayonne en régime stationnaire une puissance totale P_R à sa surface.

1. Expliciter l'origine des énergies U et E_G . A partir d'un bilan énergétique, proposer une relation entre les grandeurs U , E_G , P_Q et P_R . Discuter les conséquences du régime stationnaire du Soleil sur cette relation.
2. Les réactions de fusion nucléaire au sein du Soleil nécessitent que les particules alpha situées dans le noyau franchissent par effet tunnel une barrière de potentiel, pour échapper à l'attraction nucléaire et suivre hors du noyau un potentiel coulombien répulsif. Expliquer pourquoi la production P_Q d'énergie nucléaire est une fonction croissante de la température T_c au centre du Soleil.
3. Le transfert de l'énergie nucléaire vers la surface est très lent ($\approx 10^5$ ans), et n'a donc pas d'influence immédiate sur le rayonnement en surface. Dans ce contexte, montrer que la capacité thermique du Soleil, définie par :

$$C = \frac{\partial E}{\partial T_c}$$

est forcément négative. On pourra s'intéresser à la conséquence d'une perturbation (positive ou négative) de la température T_c au centre du Soleil.

4. Ce comportement original trouve sa cause dans l'équilibre stable entre l'énergie interne U , qui croît avec la température, et l'énergie de gravitation à longue portée E_G , qui est liée au travail des forces pressantes soit :

$$E_G = -3 \int P(r) dr$$

où $P(r)$ est la pression hydrostatique à la distance r du centre.

- (a) On souhaite montrer que le cœur du Soleil, où la température est comprise entre 2 et 15 millions de Kelvins, peut être modélisé par un mélange de gaz parfaits classiques d'électrons, de protons et de noyaux d'hélium. Afin de valider cette hypothèse, montrer qu'en ordres de grandeur, l'interaction coulombienne est négligeable devant l'agitation thermique d'une part, sans pour autant créer de particules relativistes d'autre part.
 - (b) Montrer qu'en sommant les contributions locales de chaque gaz parfait, on peut exprimer l'énergie interne volumique u en fonction de la pression P , et en déduire que $E_G = -2U$. Retrouver alors le résultat précédent portant sur la capacité thermique du Soleil.
5. L'énergie potentielle stockée par une étoile de rayon R et de masse M est :

$$E_G = -\frac{3GM^2}{5R}$$

Expliquer alors ce second comportement original du Soleil : il se contracte quand il s'échauffe.