

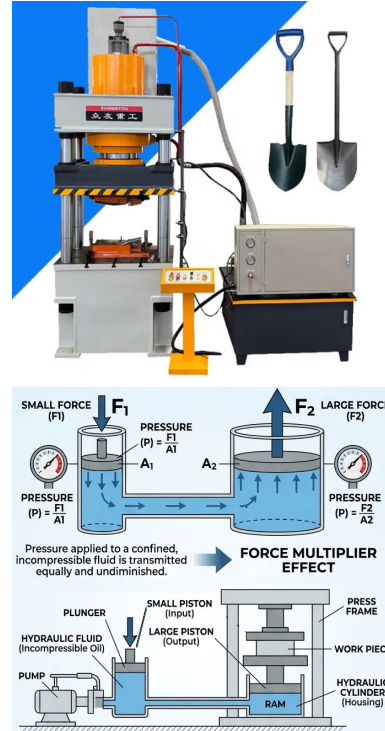
Chapitre : 2.1. Éléments de statique des fluides dans un référentiel Galiléen

Partie : 2. Mécanique des fluides appliquée aux machines thermodynamiques

Mise en contexte

En prolongement de l'étude mécanique des objets ponctuels et de la rotation des solides autour d'un axe abordé en TSI-1, nous allons décrire les actions mécaniques de nouveaux systèmes.

Nous allons ici nous intéresser aux fluides et décrire les forces qui s'exercent alors en interaction lui.



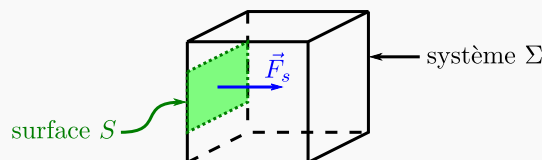
L'exploitation des forces exercées par un fluide se retrouve dans les systèmes pneumatiques ou hydrauliques et ouvre de nouvelles possibilités de conception de machine thermodynamique.

1 Forces au sein d'un fluide et champ de pression

1.1 Forces surfaciques

Définition 1 Force à courte portée

On appelle Force à courte portée ou force de contact $\vec{F}_s$, une force qui s'exerce sur une surface S délimitant un système Σ .

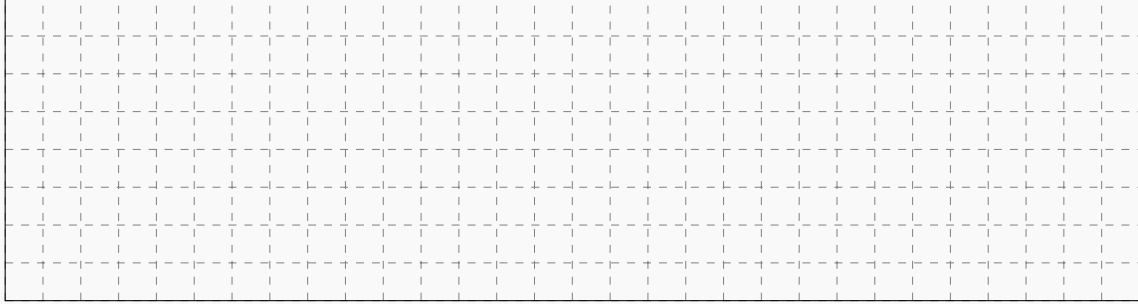


Définition 2 Force surfacique

Pour une force de contact, lorsque la surface est infinitésimale (infiniment petite) on la note dS , et on note la force de contact $d\vec{F}_s$ car elle est également infinitésimale. On appelle alors $d\vec{F}_s$ la force surfacique s'exerçant sur dS .

Propriétés 1 Une force surfacique d'un fluide statique est normale à sa surface

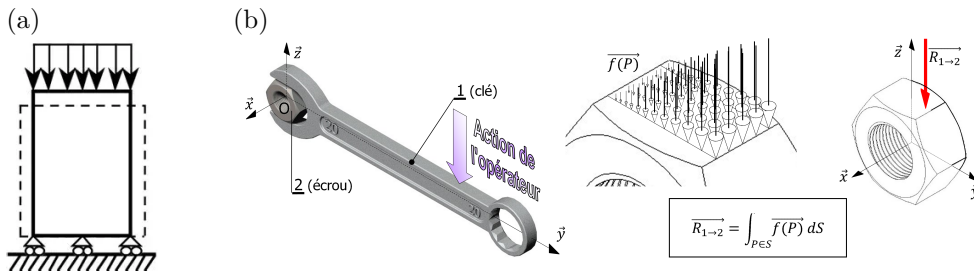
Pour tout point M de la surface Σ définissant un fluide statique, soit dS l'élément de surface de Σ autour de M , soit $\vec{n}_M$ le vecteur unitaire normal à dS , soit $d\vec{S} = dS\vec{n}_M$, alors $d\vec{F}_s // d\vec{S}$



Définition 3 Densité surfacique de force

On appelle densité surfacique de force $\vec{f}_s$ le rapport de la force surfacique $d\vec{F}_s$ sur la surface élémentaire dS définie en tout point M de la surface délimitant un système Σ .

$$\vec{f}_s = \frac{d\vec{F}_s}{dS} \quad (1)$$



Champ de densité surfacique de force (a) Représentation d'une densité surfacique de force uniforme exercée sur la surface supérieure d'une poutre, ainsi que la déformation qui en résulte (b) Lien entre densité surfacique de force et résultante dans le cas du serrage d'un écrou par une clé

Des exemples courants de densité surfacique de force se retrouvent dans :

- le modèle de la pression cinétique, où les chocs des particules composant un fluide sur une paroi donne lieu à une densité surfacique de force,
- l'action mécanique entre pièces en contact donne lieu à des forces de contact appelées réactions normale et/ou tangentielle.

Remarques 1 En statique des fluides, quelle est la direction de $\vec{f}_s$?



Propriétés 2 Une force de contact peut s'exprimer comme la résultante des forces surfaciques

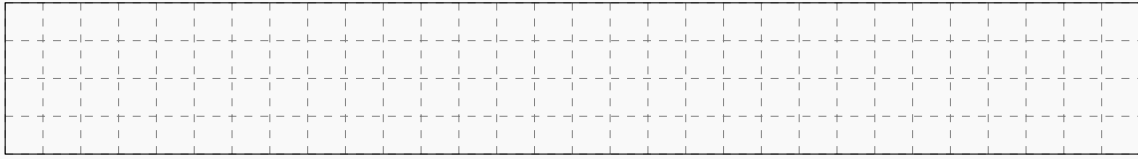
Soit $\vec{f}_s(M)$ la densité surfacique de force s'appliquant en un point M d'une surface S , alors la force de contact globale $\vec{F}_s$ s'exerçant sur S s'exprime comme :

$$\vec{F}_s = \iint_{M \in S} d\vec{F}_s(M) = \iint_{M \in S} \vec{f}_s(M) dS$$

Si $\vec{f}_s(M) = \vec{f}_{s0}$ est uniforme sur S , alors

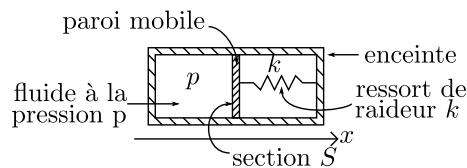
$$\vec{F}_s = \vec{f}_{s0} \times S$$

Propriétés 2 Une force de contact peut s'exprimer comme la résultante des forces surfaciques (suite)



Applications 1 Forces surfaciques

Soit une enceinte séparée en deux compartiments par une paroi mobile de section S . Le premier compartiment est rempli d'un fluide à la pression p et le second d'un simple ressort de raideur k dans le vide :

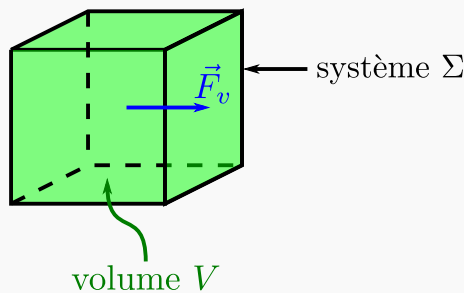


Q1. Déterminer l'allongement du ressort lorsque la paroi mobile est à l'équilibre mécanique.

1.2 Forces volumiques

Définition 4 Force à longue portée

On appelle force à longue portée ou force à distance $\vec{F}_v$, une force qui s'exerce sur le volume V d'un système Σ .



Définition 5 Force volumique

Pour une force à distance, lorsque le volume est infinitésimal on le note dV , et on note la force à distance $d\vec{F}_v$.

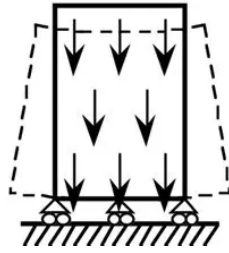
On appelle alors $d\vec{F}_v$ la force volumique s'exerçant sur dV .

Définition 6 Densité volumique de force

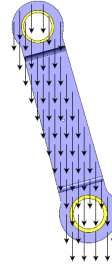
On appelle densité volumique de force $\vec{f}_v$ le rapport de la force volumique $d\vec{F}_v$ sur le volume élémentaire dV défini en tout point M du volume du système Σ .

$$\vec{f}_v = \frac{d\vec{F}_v}{dV} \quad (2)$$

(a)



(b)



Champ de densité volumique de force (a) Représentation d'une densité volumique de force uniforme exercée sur une poutre, ainsi que la déformation qui en résulte (b) Représentation de la densité volumique des forces de pesanteur sur une pièce mécanique

Des exemples courants de densité volumique de force se retrouvent dans :

- l'expression du poids, sur Terre la force d'interaction gravitationnelle sur tout objet de masse m exercé par la Terre donne lieu à la force à distance $\vec{p} = m\vec{g}$,
pour un élément de volume dV d'un objet, on peut définir une force volumique par $d\vec{p} = dm \times \vec{g}$ avec dm la masse de dV ,
ainsi qu'une densité volumique de force $\frac{d\vec{p}}{dV} = \frac{dm}{dV}\vec{g} = \rho\vec{g}$ avec ρ la masse volumique de l'objet.
- l'interaction électrostatique où une charge q_1 exerce une force à distance sur une charge q_2 , selon $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$

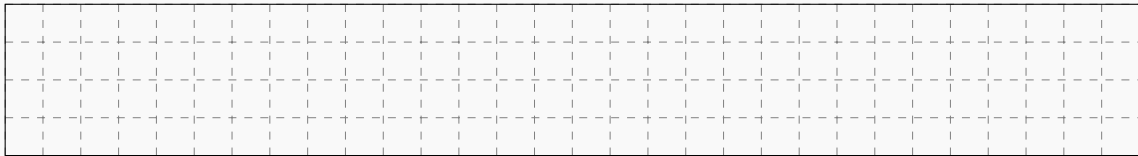
Propriétés 3 Une force à distance peut s'exprimer comme la résultante des forces volumiques

Soit $\vec{f}_v(M)$ la densité surfacique de force s'appliquant en un point M d'un volume V , alors la force à distance globale $\vec{F}_v$ s'exerçant sur V s'exprime comme :

$$\vec{F}_v = \iiint_{M \in V} d\vec{F}_v(M) = \iiint_{M \in V} \vec{f}_v(M) dV$$

Si $\vec{f}_v(M) = \vec{f}_{v0}$ est uniforme sur V , alors

$$\vec{F}_v = \vec{f}_{v0} \times V$$



Applications 2 Forces volumiques

On considère le système Terre-Lune distante de 384×10^3 km en moyenne.

- Q1.** Exprimer la densité de la force volumique exercée par l'attraction gravitationnelle de la Lune sur la Terre.
- Q2.** Comparer la norme de cette densité de force volumique entre les points les plus proches et les plus éloignés de la Lune sur la Terre.
- Q3.** Puis comparer la norme de cette densité de force volumique entre la distance Terre-Lune minimale de 356×10^3 km et maximale 406×10^3 km du à la trajectoire elliptique de la Lune autour de la Terre.

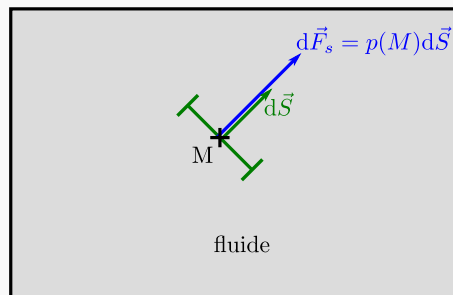
1.3 Champ de pression

Dans le paragraphe précédent nous avons défini les forces de contact et notamment celle de pression à la surface d'un fluide.

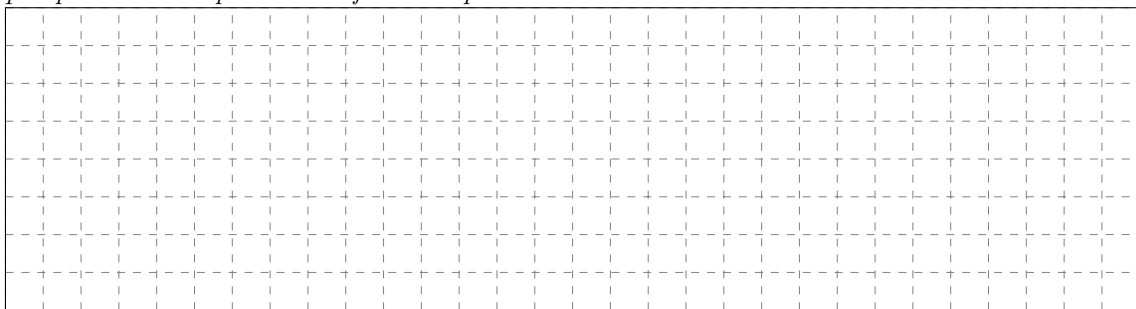
Pour la pression nous pouvons aussi la définir à l'intérieur d'un fluide en remarquant qu'elle s'exerce sur la surface de n'importe quel objet plongé dans le fluide.

Définition 7 Pression à l'intérieur d'un fluide

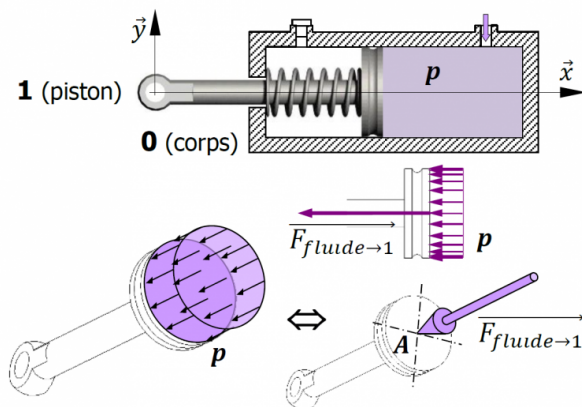
Soit un point M quelconque à l'intérieur d'un fluide, soit une surface élémentaire orientée représentée par le vecteur $d\vec{S}$ autour de M ,
la force surfacique exercée par le fluide dans le sens de $d\vec{S}$ s'exprime par $d\vec{F}_s = p(M)d\vec{S}$ avec $p(M)$ la pression en M à l'intérieur du fluide.



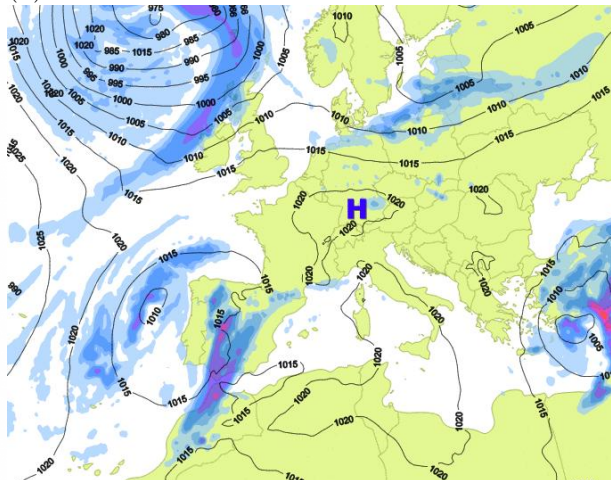
Remarques 2 Quel lien pouvons nous faire entre pression et densité de force ? Comment s'oriente et de quel paramètres dépendent les forces de pression ?



(a)



(b)

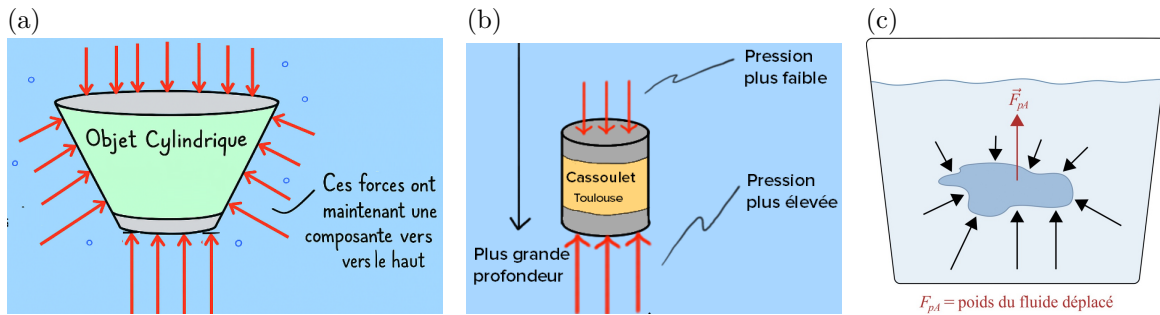


Champ de pression (a) Différentes représentations d'un champ de pression, de la densité surfacique de force et de la résultante correspondante sur un piston (b) Carte météorologique représentant un champ de pression atmosphérique à l'échelle de l'Europe.

Définition 8 Champ de pression

On appelle champ scalaire une fonction qui à tout point de l'espace associe un scalaire.
La pression est un champ scalaire, on parle alors de champ de pression :

ensemble des points de l'espace	→	ensemble des valeurs de pression
$p :$		
un point de coordonnées (x, y, z)	↦	$p(M) = p(x, y, z)$ un nombre



Poussée d'Archimède (a) schéma illustrant la présence de champ de pression vers le haut d'un fluide sur un objet immergé (b) schéma illustrant un champ de pression étant plus important lorsqu'il est orienté vers le haut (c) illustration de l'égalité entre poussée d'Archimède et résultante du champ de pression

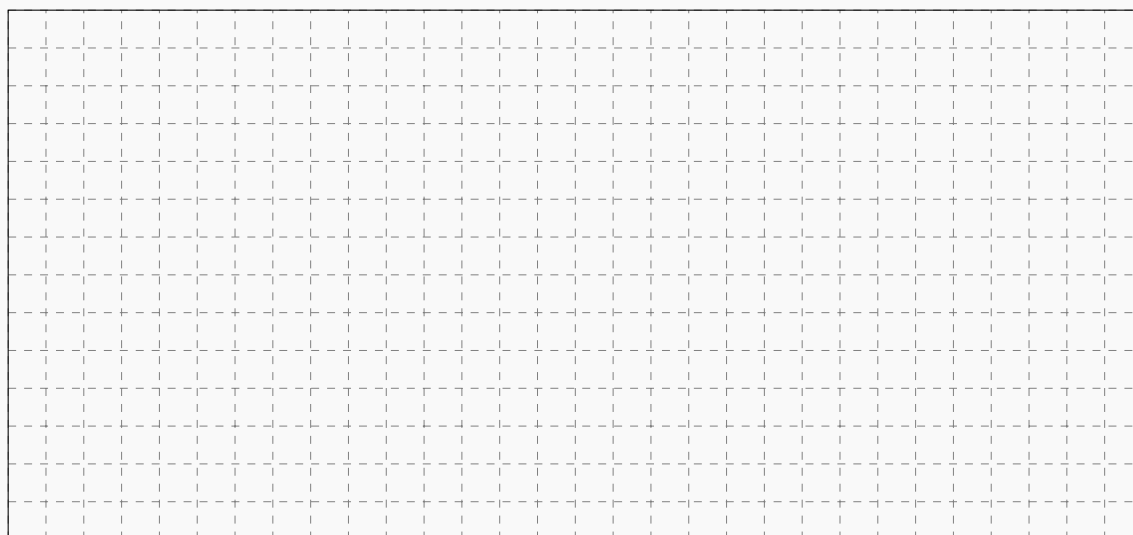
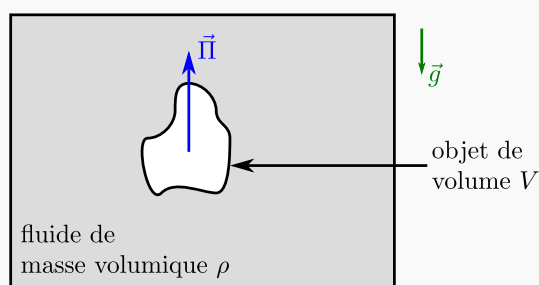
Propriétés 4 Théorème de la poussée d'Archimède

Soit un objet immergé dans un (ou plusieurs) fluide et entouré par celui-ci (ou ceux-ci), si le fluide est au repos et le système entier est soumis au poids, alors la résultante des forces de pression exercée sur l'objet est égale à l'opposé du poids de fluide déplacé.

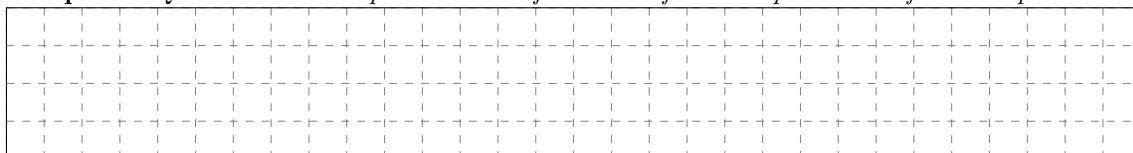
Ainsi pour un objet de volume V immergé dans un fluide de masse volumique ρ soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$, la résultante des forces de pression est :

$$\vec{\Pi} = -\rho V \vec{g} \quad (3)$$

appelée poussée d'Archimède.



Remarques 3 Quelle distinction pouvons nous faire entre forces de pression et forces de pesanteur ?



2 Pression dans un champ de pesanteur uniforme

2.1 Équations locales de la statique des fluides

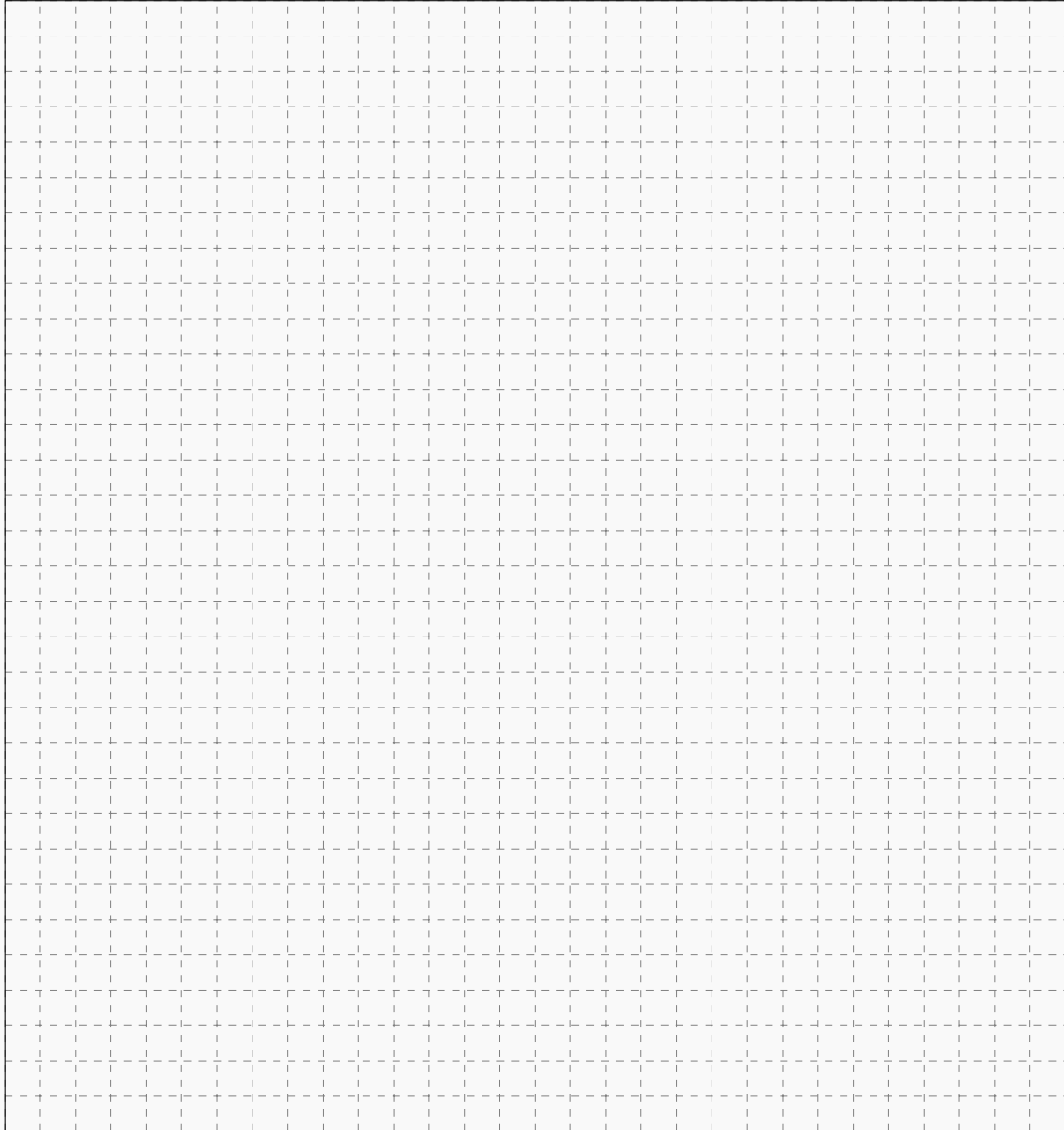
Pour décrire l'évolution de la pression en tout point interne d'un fluide, nous allons établir une équation différentielle vérifiée par le champ de pression d'un fluide.

Propriétés 5 Équations locales de la statique des fluides

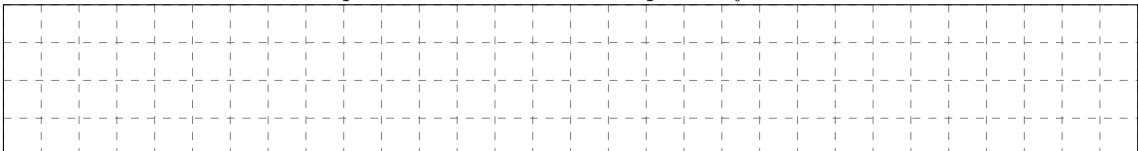
On appelle équations locales ou relations fondamentales ou principe fondamental de la statique des fluides les trois équations :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (4)$$

établies pour un fluide statique soumis à un champs de pesanteur uniforme qui s'exprime en coordonnées cartésiennes $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.



Remarques 4 Quelles sont les variations horizontales et verticales d'un champ de pression ? Comment pouvons nous réécrire alors les équations locales de la statique des fluides ?

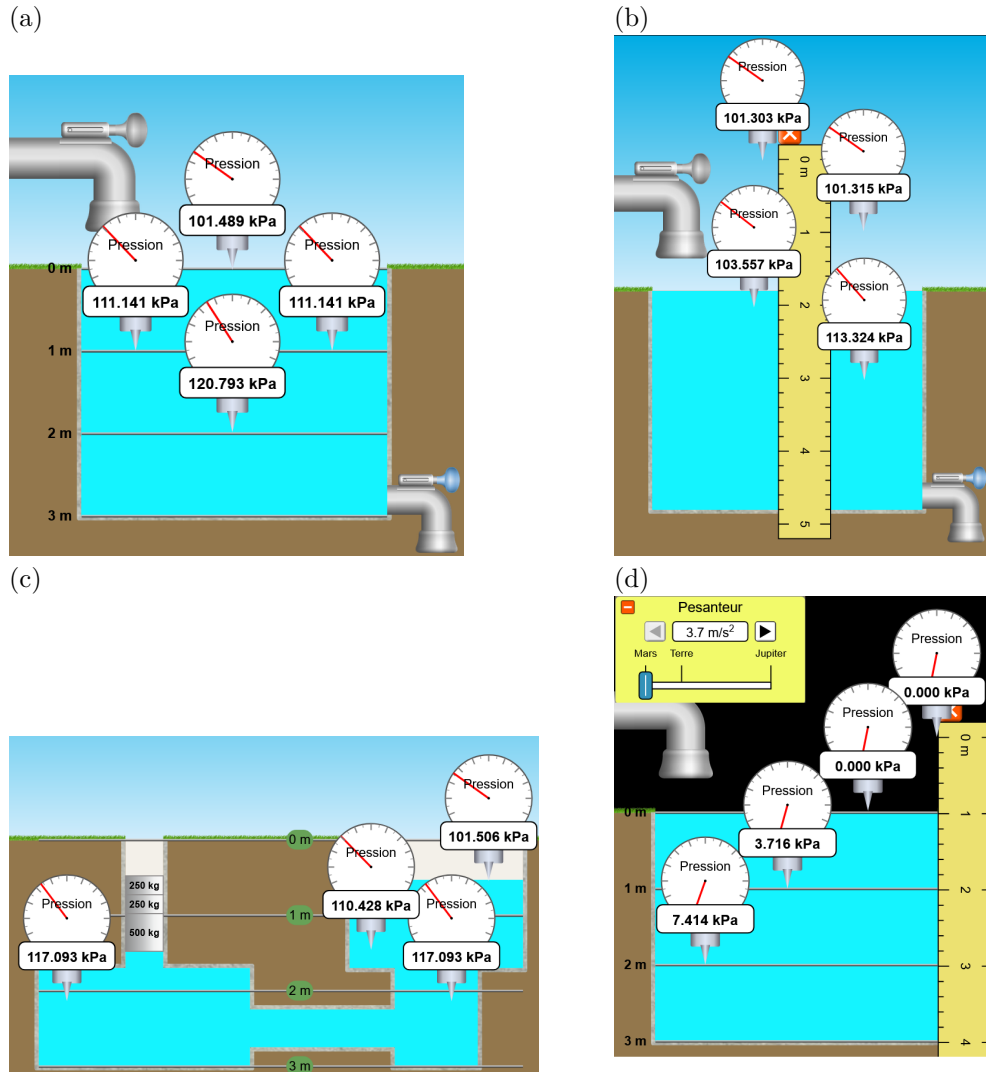


Applications 3 Équations locales de la statique des fluides

- Q1.** Par analogie avec les équations locales en coordonnées cartésiennes, déduire l'expression des équations locales de la statique des fluides en coordonnées cylindriques (r, θ, z) où le champ de pesanteur s'écrit $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.
- Q2.** Toujours en coordonnées cylindriques on considère un système en rotation uniforme de vitesse angulaire ω et d'axe (Oz) . On peut alors montrer que le fluide subit une densité volumique de force supplémentaire $\vec{f}_{ie} = \rho r \omega^2 \vec{e}_r$ en plus du champ de pesanteur $-\rho g \vec{e}_z$. En déduire les nouvelles équations locales de la statique des fluides.

2.2 Détermination du champ de pression pour un fluide statique incompressible

Nous allons résoudre l'équation différentielle précédente décrivant un fluide statique sur Terre dans le cas particulier d'un fluide incompressible. En effet les liquides de manière générale ou les gaz sur de faibles hauteurs sont généralement modélisé par une masse volumique uniforme.



Champ de pression dans un fluide statique incompressible (a) Évolution horizontale et verticale de la pression dans l'eau, (b) Évolution de la pression dans l'air et dans l'eau, (c) comparaison de la pression dans différents bassins communiquant, (d) Évolution de la pression sans atmosphère et avec l'accélération de la pesanteur de Mars.

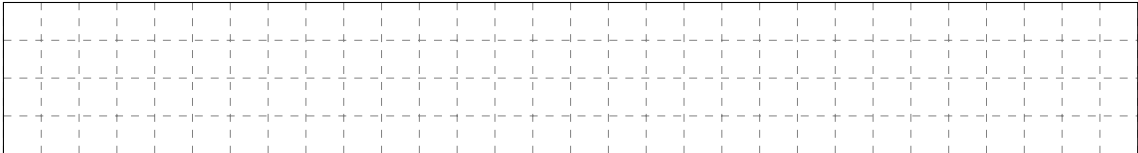
Propriétés 6 *Évolution de la pression dans un fluide statique incompressible dans un champ de pesanteur uniforme.*

Soit un fluide statique soumis à un champ de pesanteur uniforme qui s'exprime en coordonnées cartésiennes $\vec{g} = -g\vec{e}_z$,
si le fluide peut être modélisé comme un fluide incompressible soit une masse volumique $\rho(M) = \rho$ uniforme, alors la pression s'exprime :

$$p(z) = p(0) - \rho g z$$



Remarques 5 *Quelle grandeur de même dimension qu'une pression est uniforme dans un fluide statique incompressible ?*



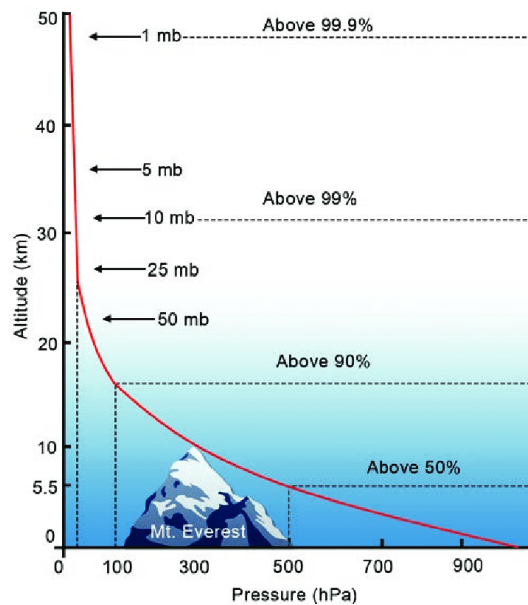
Applications 4 *Champ de pression pour un fluide statique incompressible*

On modélise l'océan comme constitué d'eau liquide incompressible de masse volumique $\rho = 1.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

- Q1.** Tracer l'évolution de la pression océanique en fonction de la profondeur h .
- Q2.** Déterminer la valeur de la variation de la pression $\frac{dp}{dh}$.
- Q3.** Déterminer la pression au fond de la fosse des Mariannes à $h = 11 \text{ km}$ de profondeur.

2.3 Détermination du champ de pression dans un gaz parfait isotherme

L'hypothèse de masse volumique uniforme (et donc le modèle incompressible) pour un gaz est limité aux faibles variation d'altitude, pour explorer l'évolution de la pression d'un gaz en fonction de l'altitude nous allons résoudre l'équation différentielle décrivant un fluide statique sur Terre dans le cas particulier d'un gaz parfait isotherme. En effet les hypothèses parfait et isotherme décriront mieux un gaz sur différentes altitudes.



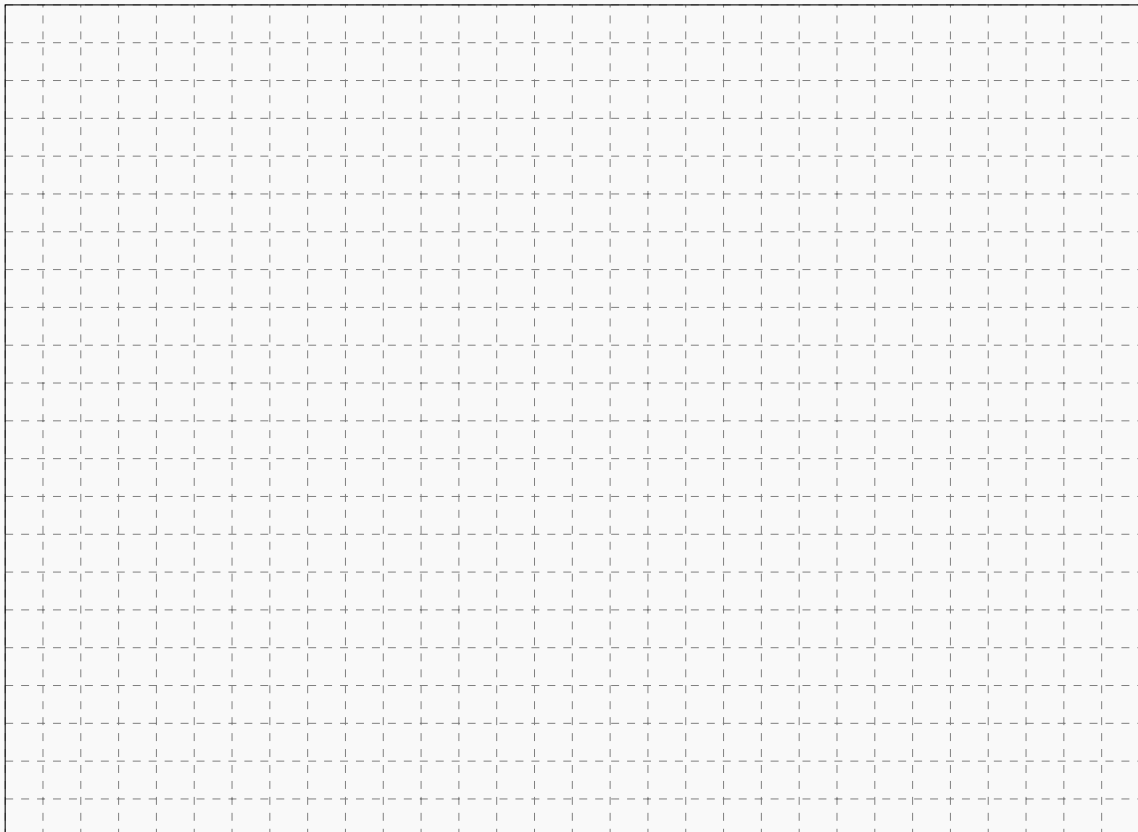
Pression atmosphérique Évolution de la pression atmosphérique avec l'altitude.

Propriétés 7 Évolution de la pression d'un gaz parfait isotherme dans un champ de pesanteur uniforme.

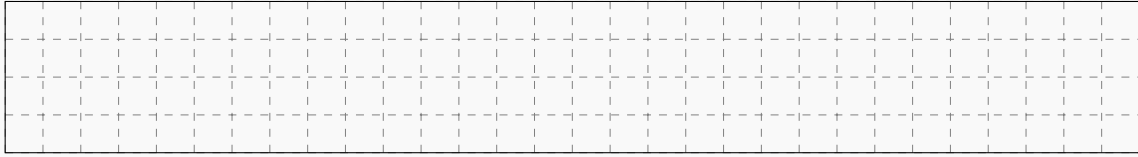
Soit un fluide statique soumis à un champ de pesanteur uniforme qui s'exprime en coordonnées cartésiennes $\vec{g} = -g\vec{e}_z$,
si le fluide peut être modélisé comme un gaz parfait isotherme soit une température $T(M) = T$ uniforme, alors la pression s'exprime :

$$p(z) = p(0) \times \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

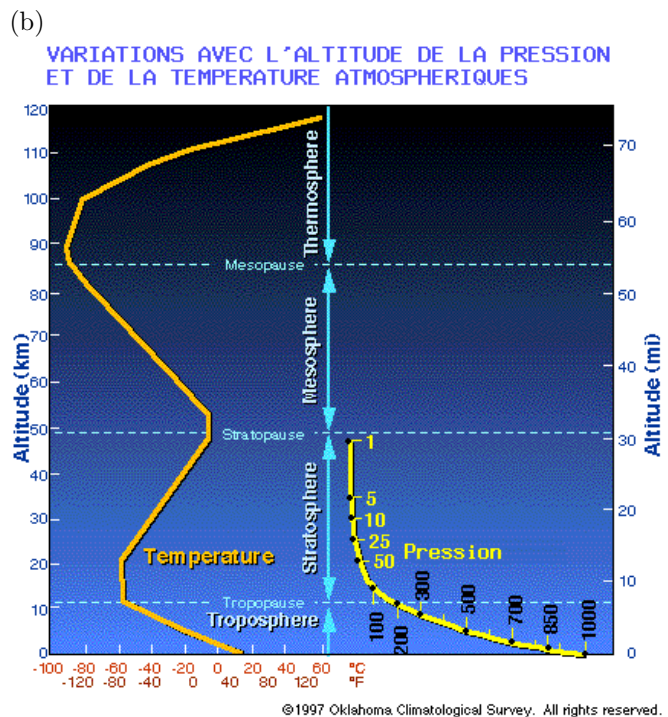
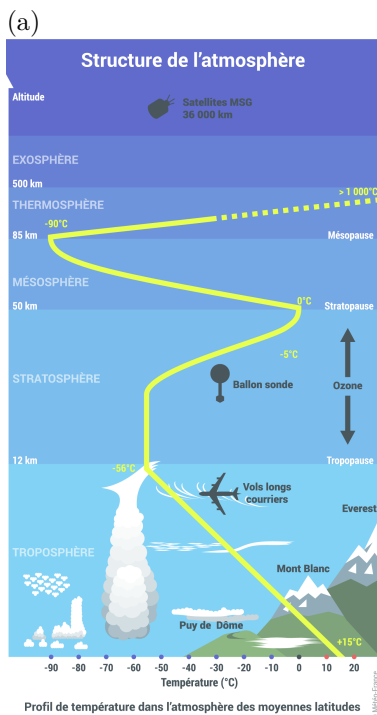
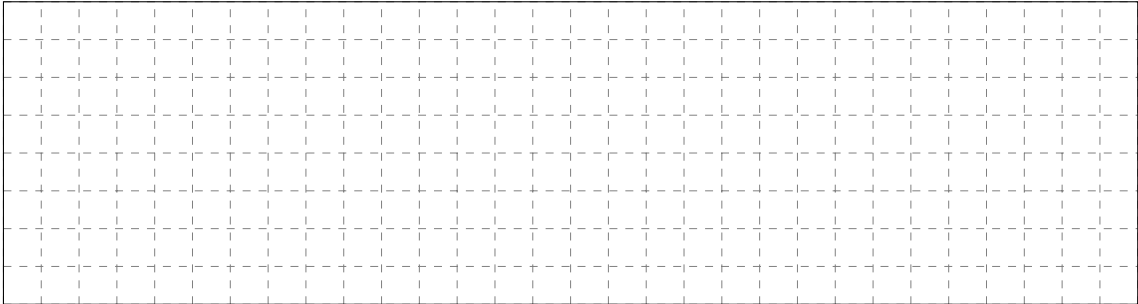
avec $H = \frac{RT}{Mg}$ où M est la masse molaire du gaz.



Propriétés 7 Évolution de la pression d'un gaz parfait isotherme dans un champ de pesanteur uniforme. (suite)

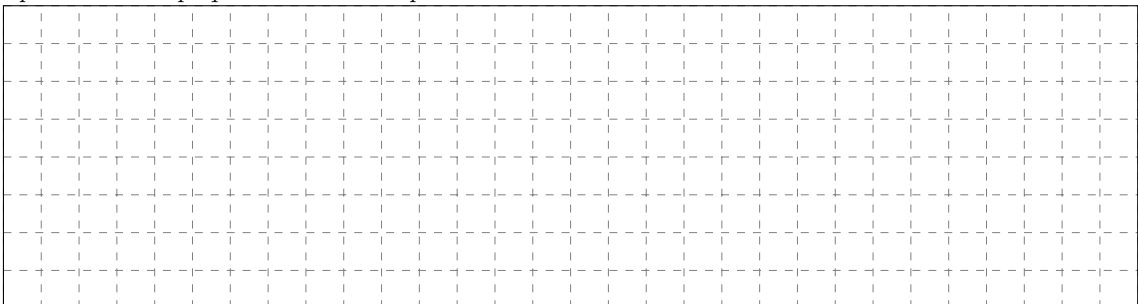


Remarques 6 Sur quelle hauteur caractéristique la masse volumique d'un gaz parfait isotherme varie-t-elle ? Pour une variation d'altitude très faible comparée à cette hauteur les modèles incompressible et gaz parfait isotherme sont-ils compatibles ?



Hypothèse isotherme de l'atmosphère (a) Évolution de la température atmosphérique avec l'altitude, (b) Superposition des courbes de pression et de température atmosphérique.

Remarques 7 Quel commentaire pouvons-nous apporter au modèle isotherme de l'atmosphère terrestre ? Que permet-il d'expliquer et comment pourrions-nous l'améliorer ?



Applications 5 *Champ de pression pour un gaz parfait isotherme*

On modélise l'atmosphère comme un gaz parfait isotherme constitué à 80% de diazote de masse molaire $M(N_2) = 28 \text{ g.mol}^{-1}$ et à 20% de dioxygène de masse molaire $M(O_2) = 32 \text{ g.mol}^{-1}$ à la température $T = 298 \text{ K}$.

Q1. Tracer l'évolution de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude z .

Q2. Déterminer la valeur de la variation de pression au niveau du sol $\frac{dp}{dz}(z = 0)$ et l'altitude $z_{1/2}$ à partir de laquelle la pression est divisée par deux par rapport au sol $p(z_{1/2}) = \frac{p(0)}{2}$.

Q3. Enfin déterminez la pression au sommet de l'Everest à l'altitude $z_E = 8,8 \text{ km}$.

Vers les concours

- Établir les équations locales de la statique des fluides.
- Résoudre les équations locales de la statique des fluides pour différents modèles : incompressible, gaz parfait isotherme, gradient de température, compressible ...
- Interpréter les valeurs numériques d'un champ de pression.
- Connaître et discuter les modèles incompressible et gaz parfait isotherme pour un champ de pression.