

Travaux Dirigés du chapitre : 3.4 Transferts d'énergie par conduction thermique à 1D en coordonnée cartésienne

Partie : 3 Thermodynamique des fluides appliquées aux machines thermiques

Éléments de correction

1 Cuisson d'un œuf et fonte d'un glaçon

1. La fonte du glaçon est terminée lorsque la réaction chimique de fusion a atteint son avancement final et que l'enthalpie a varié de $\Delta H = \xi_f \Delta_{fus} H$.

Le transfert thermique entre l'eau liquide et le glaçon se fait par convection donc Φ le flux est constant en première approximation, car la température du glaçon est constante et celle de l'extérieur aussi.

La durée est donnée par $\Delta H = \Phi \Delta t$ donc $\Delta t = \frac{\xi_f \Delta_{fus} H}{\Phi}$.

Donc si le glaçon est deux fois plus gros alors ξ_f est deux fois plus grand donc Δt l'est aussi.

2. La cuisson d'un oeuf a lieu lorsque la tout à coagulé, donc lorsque le centre à atteint une température suffisante, donc il s'agit d'une diffusion thermique d'une variation de température.

D'où en ordre de grandeur $\tau = \frac{L^2}{D}$ or la taille d'un oeuf L est proportionnel à la racine cubique de son volume et donc de sa masse $L \propto V^{1/3} \propto m^{1/3}$ donc $\tau \propto m^{2/3}$. En comparant les deux oeufs on a :

$$\tau_{autruche} = \left(\frac{m_{autruche}}{m_{poule}} \right)^{2/3} \tau_{poule}$$

2 Effet de cave

1. Dans le sol on a une équation de diffusion, en géométrie 1D cartésienne sans terme source :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

on remplace $\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{f}(x) \exp(j\omega t)$

$$j\omega \underline{f}(x) \exp(j\omega t) = D \frac{d^2 \underline{f}}{dx^2} \exp(j\omega t)$$

donc

$$\frac{d^2 \underline{f}}{dx^2} - j \frac{\omega}{D} \underline{f}(x) = 0$$

équation différentielle homogène du second ordre de solutions :

$$\underline{f}(x) = A \exp \left(-(1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x \right) + B \exp \left((1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x \right)$$

La condition au limite en $x \rightarrow +\infty$, impose que $\underline{f}(x)$ reste fini donc $B = 0$.

La condition au limite en $x = 0$ impose que $\underline{f}(0) = a$ donc $A = a$.

d'où

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{f}(x) \exp(j\omega t)$$

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + a \exp \left(-(1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x \right) \exp(j\omega t)$$

$$T(x, t) = T_0 + a \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} x \right) \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x \right)$$

$$T(x, t) = T_0 + a \exp \left(-\frac{x}{\delta} \right) \cos \left(\omega t - \frac{x}{\delta} \right)$$

On obtient une onde évanescence qui se propage dans le sens des x croissant et sur une distance caractéristique de quelques δ .

2. L'amplitude de variation de température est de 15 °C donc $a = 15$ K.

La variation est journalière donc $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ avec $\tau = 24 \times 3600$ s

La profondeur est de 50 cm donc $x = 0,50$ m.

On calcule alors la nouvelle variation de température en évaluant $a \exp \left(-\frac{x}{\delta} \right)$.

3 Ailette de refroidissement

1. On considère comme système un élément mésoscopique de l'ailette entre x et $x + dx$.

On applique le premier principe infinitésimal monobare :

$$dH = \Phi_{cond}(x)dt - \Phi_{cond}(x + dx)dt - \Phi_{conv}(x)dt$$

$$\frac{\partial dH}{\partial t} dt = -\frac{\partial \Phi_{cond}}{\partial x} dx dt - \Phi_{conv}(x)dt$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} \rho \pi a^2 dx dt = -\frac{\partial j_Q(x)}{\partial x} \pi a^2 dx dt - h(T(x) - T_e) 2\pi a dx dt$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} \rho a = -\frac{\partial j_Q(x)}{\partial x} a - 2h(T(x) - T_e)$$

$$c_p \rho a \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2h(T(x) - T_e)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{D}{\delta^2} (T(x) - T_e)$$

régime stationnaire donc $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$
donc

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} (T(x) - T_e) = 0$$

équation différentielle homogène du second ordre de solution générale :

$$T(x) = T_e + A \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

Si la tige est infinie la condition au limite $x \rightarrow +\infty$ donne que $T(x)$ ne peut pas diverger donc $B = 0$.

La condition au limite $x = 0$ donne que $A = T(0) - T_e$

$$T(x) = T_e + (T(0) - T_e) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

2. On reprend la solution générale précédente

$$T(x) = T_e + A \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

On la ré-écrit comme une somme de fonction hyperbolique

$$T(x) = T_e + A' \cosh\left(\frac{x}{\delta}\right) + B' \sinh\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

La condition au limite $x = 0$ donne que $A' = T(0) - T_e$

La condition au limite $x = L$ est qu'il y a un transfert thermique convectif à l'extrémité de l'ailette, donc

$$\Phi(L) = h(T(L) - T_e)\pi a^2$$

$$-\lambda \frac{dT}{dx}(L) = h(T(L) - T_e)$$

$$-\frac{\lambda}{\delta} \left(A' \sinh\left(\frac{L}{\delta}\right) + B' \cosh\left(\frac{L}{\delta}\right) \right) = h \left(A' \cosh\left(\frac{L}{\delta}\right) + B' \sinh\left(\frac{L}{\delta}\right) \right)$$

$$B' = -\frac{h \cosh\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda}{\delta} \sinh\left(\frac{L}{\delta}\right)}{h \sinh\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda}{\delta} \cosh\left(\frac{L}{\delta}\right)} A' = -\frac{\frac{\lambda}{\delta h} \tanh\left(\frac{L}{\delta}\right) + 1}{\tanh\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda}{\delta h}} (T(0) - T_e)$$

$$T(L) = T_e + A' \cosh\left(\frac{L}{\delta}\right) + B' \sinh\left(\frac{L}{\delta}\right)$$

$$T(L) = T_e + (T(0) - T_e) \left(\cosh\left(\frac{L}{\delta}\right) - \frac{\frac{\lambda}{\delta h} \tanh\left(\frac{L}{\delta}\right) + 1}{\tanh\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda}{\delta h}} \sinh\left(\frac{L}{\delta}\right) \right)$$

$$T(L) = T_e + (T(0) - T_e) \frac{\cosh\left(\frac{L}{\delta}\right) \left(\tanh\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda}{\delta h} \right) - \sinh\left(\frac{L}{\delta}\right) \left(\frac{\lambda}{\delta h} \tanh\left(\frac{L}{\delta}\right) + 1 \right)}{\tanh\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda}{\delta h}}$$

$$T(L) = T_e + \frac{T(0) - T_e}{\cosh\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\delta h}{\lambda} \sinh\left(\frac{L}{\delta}\right)}$$

3. L'intérêt du dispositif est d'avoir un transfert thermique vers l'extérieur maximal donc Φ_{tot} maximal.

Or on est en régime stationnaire donc $\Phi_{tot} = \Phi_{cond}(0)$

donc

$$\Phi_{tot} = -\lambda \pi a^2 \frac{dT}{dx}(0)$$

donc

$$\Phi_{tot} = -\lambda \pi a^2 \frac{B'}{\delta}$$

donc

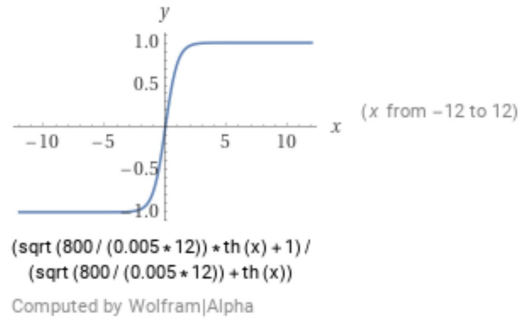
$$\Phi_{tot} = \frac{\lambda \pi a^2 (T_0 - T_e)}{\delta} \frac{\frac{\lambda}{\delta h} \tanh\left(\frac{L}{\delta}\right) + 1}{\tanh\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda}{\delta h}}$$

donc

On cherche la valeur de L qui maximise Φ_{tot} ,

$$\text{or } \frac{\lambda}{\delta h} = \sqrt{\frac{2\lambda}{ah}} \approx 115$$

donc Φ_{tot} est strictement croissante (elle ressemble à moins d'un pour-cent près à une fonction tangente hyperbolique)



donc $L \gg \delta$ est la valeur optimale.

4 Simple et double vitrage

1. $R = \frac{T_i - T_e}{\Phi} = \frac{e}{\lambda h}$
donc $\Phi = \frac{(T_i - T_e)\lambda h}{e}$
2. Les trois éléments sont en série donc :
 $R_{tot} = R_{vitre} + R_{air} + R_{vitre} = 2\frac{e_{vitre}}{\lambda h} + \frac{e_{air}}{\lambda_{air} h}$
donc $\Phi = \frac{T_i - T_e}{R_{tot}}$

Pour déterminer les différentes températures dans le double vitrage on utilise les formules du pont diviseur de tension :

$$T_{vitre1/air} = T_e + \frac{R_{air} + R_{vitre}}{R_{air} + 2R_{vitre}}(T_i - T_e)$$

$$T_{air/vitre2} = T_e + \frac{R_{vitre}}{R_{air} + 2R_{vitre}}(T_i - T_e)$$

On est en régime stationnaire, à 1D cartésien donc la température suit une droite affine entre les températures T_i , $T_{vitre1/air}$, $T_{air/vitre2}$, T_e .

5 Le long jeune hivernal

1. On calcule la résistance thermique du manchot $R = \frac{e}{2\pi\lambda r L}$, avec e l'épaisseur de la graisse supposée très petite devant les autres dimensions, r le rayon du manchot, et L la hauteur du manchot.

On applique le premier principe au manchot : $\Delta H = Q_{ext} + Q_{graisse}$.

Le manchot se maintient à température constante donc $\Delta H = 0$, il se chauffe en consommant de la graisse donc $Q_{graisse} = m_{graisse}h = \rho_{graisse}(2\pi r e L)h$, il est refroidit par l'extérieur $Q_{ext} = -\Phi\Delta t = -\frac{T_{int} - T_{ext}}{R}\Delta t$.

$$\text{Ainsi } \rho_{graisse}(2\pi r e L)h = \frac{2\pi\lambda r L(T_{int} - T_{ext})}{e}\Delta t \text{ donc } e = \sqrt{\frac{\lambda(T_{int} - T_{ext})\Delta t}{h\rho_{graisse}}}$$

2. On change la durée Δt en dt donc le premier principe devient $dH = \delta Q_{graisse} + \delta Q_{ext}$.

On a toujours $dH = 0$ car la température est cte.

Par contre $\delta Q_{graisse} = dm_{graisse}h = \rho_{graisse}(2\pi r(-de)L)h$

Et $\delta Q_{ext} = -\Phi dt = -\frac{T_{int} - T_{ext}}{R}dt$

Donc $\rho_{graisse}(2\pi r(-de)L)h = \frac{2\pi\lambda r L(T_{int} - T_{ext})}{e}dt$

donc $\frac{de}{dt} = -\frac{\lambda(T_{int} - T_{ext})}{\rho_{graisse}he}$

donc $\frac{d(e^2)}{dt} = -2\frac{\lambda(T_{int} - T_{ext})}{\rho_{graisse}h}$

donc $e(t) = \sqrt{e^2(0) - 2\frac{\lambda(T_{int} - T_{ext})}{\rho_{graisse}h}t}$

Or $e(\Delta t) = 0$ donc $e_0 = \sqrt{\frac{2\lambda(T_{int} - T_{ext})\Delta t}{h\rho_{graisse}}}$