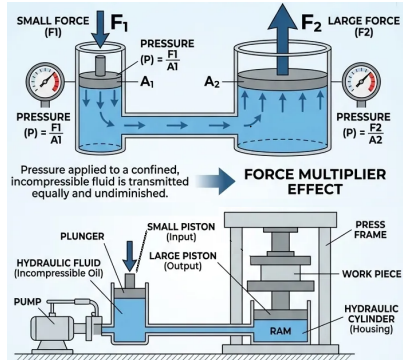


Chapitre: 2.1. Éléments de statique des fluides

Partie : 2. Mécanique des fluides

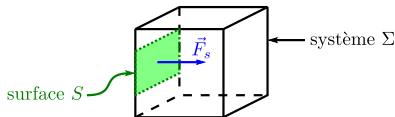


1 Forces au sein d'un fluide et champ de pression

1.1 Forces surfaciques

Définition 1 Force à courte portée

On appelle Force à courte portée ou force de contact $\vec{F}_s$, une force qui s'exerce sur une surface S délimitant un système Σ .



Définition 2 Force surfacique

Pour une force de contact, lorsque la surface est infinitésimale (infiniment petite) on la note dS , et on note la force de contact $d\vec{F}_s$ car elle est également infinitésimale.

On appelle alors $d\vec{F}_s$ la force surfacique s'exerçant sur dS .

Propriétés 1 Une force surfacique d'un fluide statique est normale à sa surface

Pour tout point M de la surface Σ définissant un fluide statique, soit dS l'élément de surface de Σ autour de M , soit $\vec{n}_M$ le vecteur unitaire normal à dS , soit $d\vec{S} = dS\vec{n}_M$, alors $d\vec{F}_s // d\vec{S}$

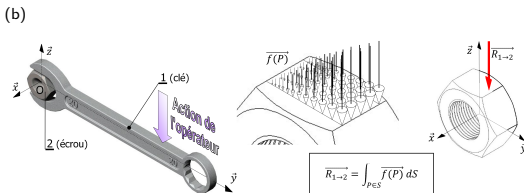
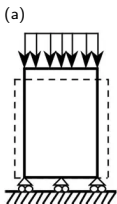
1 Forces au sein d'un fluide et champ de pression

1.1 Forces surfaciques

Définition 3 *Densité surfacique de force*

On appelle densité surfacique de force $\vec{f}_s$ le rapport de la force surfacique $d\vec{F}_s$ sur la surface élémentaire dS définie en tout point M de la surface délimitant un système Σ .

$$\vec{f}_s = \frac{d\vec{F}_s}{dS}$$



Champ de densité surfacique de force

(a) Représentation d'une densité surfacique de force uniforme exercée sur la surface supérieure d'une poutre, ainsi que la déformation qui en résulte (b) Lien entre densité surfacique de force et résultante dans le cas du serrage d'un écrou par une clé

Remarques 1 En statique des fluides, quelle est la direction de $\vec{f}_s$?

1 Forces au sein d'un fluide et champ de pression

1.1 Forces surfaciques

Propriétés 2 Une force de contact peut s'exprimer comme la résultante des forces surfaciques

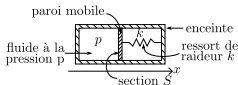
Soit $\vec{f}_s(M)$ la densité surfacique de force s'appliquant en un point M d'une surface S , alors la force de contact globale $\vec{F}_s$ s'exerçant sur S s'exprime comme :

$$\vec{F}_s = \iint_{M \in S} d\vec{F}_s(M) = \iint_{M \in S} \vec{f}_s(M) dS$$

Si $\vec{f}_s(M) = \vec{f}_{s0}$ est uniforme sur S , alors $\vec{F}_s = \vec{f}_{s0} \times S$

Application 1 Forces surfaciques

Soit une enceinte séparée en deux compartiments par une paroi mobile de section S . Le premier compartiment est rempli d'un fluide à la pression p et le second d'un simple ressort de raideur k dans le vide :



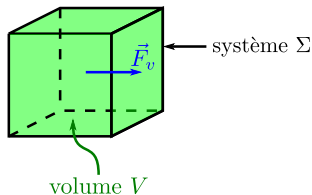
Q1. Déterminer l'allongement du ressort lorsque la paroi mobile est à l'équilibre mécanique.

1 Forces au sein d'un fluide et champ de pression

1.2 Forces volumiques

Définition 4 Force à longue portée

On appelle force à longue portée ou force à distance $\vec{F}_v$, une force qui s'exerce sur le volume V d'un système Σ .



Définition 5 Force volumique

Pour une force à distance, lorsque le volume est infinitésimal on le note dV , et on note la force à distance $d\vec{F}_v$.

On appelle alors $d\vec{F}_v$ la force volumique s'exerçant sur dV .

1 Forces au sein d'un fluide et champ de pression

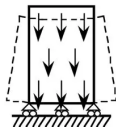
1.2 Forces volumiques

Définition 6 *Densité volumique de force*

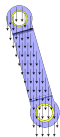
On appelle densité volumique de force $\vec{f}_v$ le rapport de la force volumique $d\vec{F}_v$ sur le volume élémentaire dV défini en tout point M du volume du système Σ .

$$\vec{f}_v = \frac{d\vec{F}_v}{dV}$$

(a)



(b)



Champ de densité volumique de force (a) Représentation d'une densité volumique de force uniforme exercée sur une poutre, ainsi que la déformation qui en résulte (b) Représentation de la densité volumique des forces de pesanteur sur une pièce mécanique

1 Forces au sein d'un fluide et champ de pression

1.2 Forces volumiques

Propriété 3 *Une force à distance peut s'exprimer comme la résultante des forces volumiques*

Soit $\vec{f}_v(M)$ la densité surfacique de force s'appliquant en un point M d'un volume V , alors la force à distance globale $\vec{F}_v$ s'exerçant sur V s'exprime comme :

$$\vec{F}_v = \iiint_{M \in V} d\vec{F}_v(M) = \iiint_{M \in V} \vec{f}_v(M) dV$$

Si $\vec{f}_v(M) = \vec{f}_{v0}$ est uniforme sur V , alors $\vec{F}_v = \vec{f}_{v0} \times V$

Application 2 Forces volumiques

On considère le système Terre-Lune distante de 384×10^3 km en moyenne.

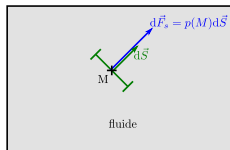
- Q1. Exprimer la densité de la force volumique exercée par l'attraction gravitationnelle de la Lune sur la Terre.
- Q2. Comparer la norme de cette densité de force volumique entre les points les plus proches et les plus éloignés de la Lune sur la Terre.
- Q3. Puis comparer la norme de cette densité de force volumique entre la distance Terre-Lune minimale de 356×10^3 km et maximale 406×10^3 km du à la trajectoire elliptique de la Lune autour de la Terre.

1 Forces au sein d'un fluide et champ de pression

1.3 Champ de pression

Définition 7 *Pression à l'intérieur d'un fluide*

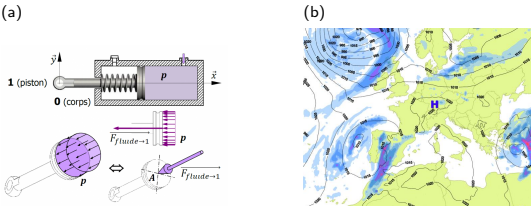
Soit un point M quelconque à l'intérieur d'un fluide, soit une surface élémentaire orientée représentée par le vecteur $d\vec{S}$ autour de M , la force surfacique exercée par le fluide dans le sens de $d\vec{S}$ s'exprime par $d\vec{F}_s = p(M)d\vec{S}$ avec $p(M)$ la pression en M à l'intérieur du fluide.



Remarque 2 *Quel lien pouvons nous faire entre pression et densité de force ? Comment s'oriente et de quel paramètres dépendent les forces de pression ?*

1 Forces au sein d'un fluide et champ de pression

1.3 Champ de pression



Champ de pression (a) Différentes représentations d'un champ de pression, de la densité surfacique de force et de la résultante correspondante sur un piston (b) Carte météorologique représentant un champ de pression atmosphérique à l'échelle de l'Europe.

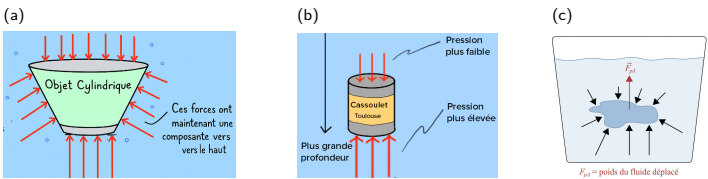
Définition 8 *Champ de pression*

On appelle champ scalaire une fonction qui à tout point de l'espace associe un scalaire. La pression est un champ scalaire, on parle alors de champ de pression :

p :	ensemble des points de l'espace	$\longrightarrow$	ensemble des valeurs de pression
	un point de coordonnées (x, y, z)	$\longmapsto$	$p(M) = p(x, y, z)$ un nombre

1 Forces au sein d'un fluide et champ de pression

1.3 Champ de pression



Poussée d'Archimède (a) schéma illustrant la présence de champ de pression vers le haut d'un fluide sur un objet immergé (b) schéma illustrant un champ de pression étant plus important lorsqu'il est orienté vers le haut (c) illustration de l'égalité entre poussée d'Archimède et résultante du champ de pression

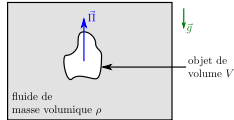
Propriété 4 Théorème de la poussée d'Archimède

Soit un objet immergé dans un (ou plusieurs) fluide et entouré par celui-ci (ou ceux-ci), si le fluide est au repos et le système entier est soumis au poids, alors la résultante des forces de pression exercée sur l'objet est égale à l'opposé du poids de fluide déplacé.

Ainsi pour un objet de volume V immergé dans un fluide de masse volumique ρ soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$, la résultante des forces de pression est :

$$\vec{\Pi} = -\rho V \vec{g} \tag{1}$$

appelée poussée d'Archimède.



Remarque 3 Quelle distinction pouvons nous faire entre forces de pression et forces de pesanteur ?

2 Pression dans un champ de pesanteur uniforme

2.1 Équations locales de la statique des fluides

Propriété 5 *Équations locales de la statique des fluides*

On appelle équations locales ou relations fondamentales ou principe fondamental de la statique des fluides les trois équations :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$$

établies pour un fluide statique soumis à un champs de pesanteur uniforme qui s'exprime en coordonnées cartésiennes $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

Remarque 4 *Quelles sont les variations horizontales et verticales d'un champ de pression ? Comment pouvons nous réécrire alors les équations locales de la statique des fluides ?*

2 Pression dans un champ de pesanteur uniforme

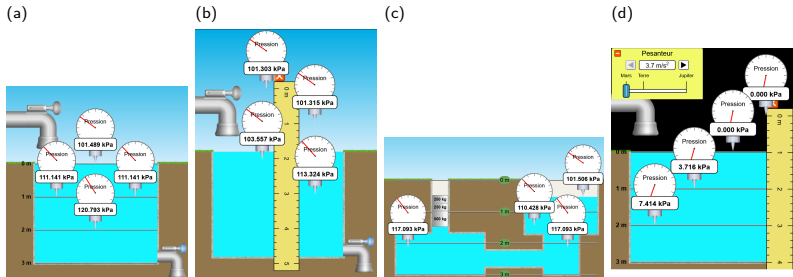
2.1 Équations locales de la statique des fluides

Application 3 *Équations locales de la statique des fluides*

- Q1.** Par analogie avec les équations locales en coordonnées cartésiennes, déduire l'expression des équations locales de la statique des fluides en coordonnées cylindriques (r, θ, z) où le champ de pesanteur s'écrit $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.
- Q2.** Toujours en coordonnées cylindriques on considère un système en rotation uniforme de vitesse angulaire ω et d'axe (Oz) . On peut alors montrer que le fluide subit une densité volumique de force supplémentaire $\vec{f}_{ie} = \rho r \omega^2 \vec{e}_r$ en plus du champ de pesanteur $-\rho g \vec{e}_z$.
En déduire les nouvelles équations locales de la statique des fluides.

2 Pression dans un champ de pesanteur uniforme

2.2 Détermination du champ de pression pour un fluide statique incompressible



Champ de pression dans un fluide statique incompressible (a) Évolution horizontale et verticale de la pression dans l'eau, (b) Évolution de la pression dans l'air et dans l'eau, (c) comparaison de la pression dans différents bassins communicants, (d) Évolution de la pression sans atmosphère et avec l'accélération de la pesanteur de Mars.

2 Pression dans un champ de pesanteur uniforme

2.2 Détermination du champ de pression pour un fluide statique incompressible

Propriété 6 *Évolution de la pression dans un fluide statique incompressible dans un champ de pesanteur uniforme.*

Soit un fluide statique soumis à un champs de pesanteur uniforme qui s'exprime en coordonnées cartésiennes $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, si le fluide peut être modélisé comme un fluide incompressible soit une masse volumique $\rho(M) = \rho$ uniforme, alors la pression s'exprime :

$$p(z) = p(0) - \rho g z$$

Remarque 5 *Quelle grandeur de même dimension qu'une pression est uniforme dans un fluide statique incompressible ?*

2 Pression dans un champ de pesanteur uniforme

2.2 Détermination du champ de pression pour un fluide statique incompressible

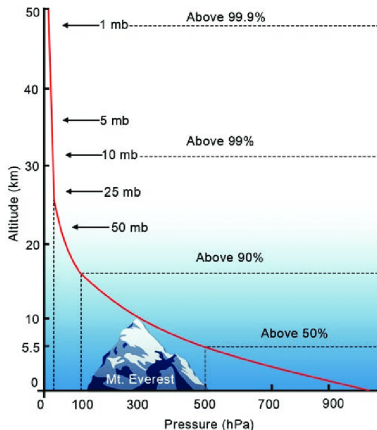
Application 4 *Champ de pression pour un fluide statique incompressible*

On modélise l'océan comme constitué d'eau liquide incompressible de masse volumique $\rho = 1.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

- Q1.** Tracer l'évolution de la pression océanique en fonction de la profondeur h .
- Q2.** Déterminer la valeur de la variation de la pression $\frac{dp}{dh}$.
- Q3.** Déterminer la pression au fond de la fosse des Mariannes à $h = 11 \text{ km}$ de profondeur.

2 Pression dans un champ de pesanteur uniforme

2.3 Détermination du champ de pression dans un gaz parfait isotherme



Pression atmosphérique Évolution de la pression atmosphérique avec l'altitude.

2 Pression dans un champ de pesanteur uniforme

2.3 Détermination du champ de pression dans un gaz parfait isotherme

Propriété 7 *Évolution de la pression d'un gaz parfait isotherme dans un champ de pesanteur uniforme*

Soit un fluide statique soumis à un champs de pesanteur uniforme qui s'exprime en coordonnées cartésiennes $\vec{g} = -g\vec{e}_z$,
si le fluide peut être modélisé comme un gaz parfait isotherme soit une température $T(M) = T$ uniforme, alors la pression s'exprime :

$$p(z) = p(0) \times \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

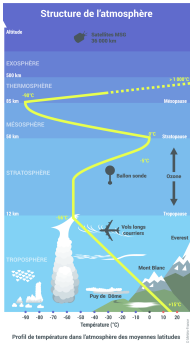
avec $H = \frac{RT}{Mg}$ où M est la masse molaire du gaz.

Remarque 6 *Sur quelle hauteur caractéristique la masse volumique d'un gaz parfait isotherme varie-t-elle ? Pour une variation d'altitude très faible comparée à cette hauteur les modèles incompressible et gaz parfait isotherme sont-ils compatibles ?*

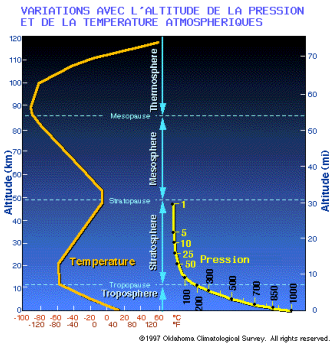
2 Pression dans un champ de pesanteur uniforme

2.3 Détermination du champ de pression dans un gaz parfait isotherme

(a)



(b)



Hypothèse isotherme de l'atmosphère (a) Évolution de la température atmosphérique avec l'altitude, (b) Superposition des courbes de pression et de température atmosphérique.

Remarque 7 Quel commentaire pouvons-nous apporter au modèle isotherme de l'atmosphère terrestre ? Que permet-il d'expliquer et comment pourrions-nous l'améliorer ?

2 Pression dans un champ de pesanteur uniforme

2.3 Détermination du champ de pression dans un gaz parfait isotherme

Application 5 *Champ de pression pour un gaz parfait isotherme*

On modélise l'atmosphère comme un gaz parfait isotherme constitué à 80% de diazote de masse molaire $M(N_2) = 28 \text{ g.mol}^{-1}$ et à 20% de dioxygène de masse molaire $M(O_2) = 32 \text{ g.mol}^{-1}$ à la température $T = 298 \text{ K}$.

- Q1.** Tracer l'évolution de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude z .
- Q2.** Déterminer la valeur de la variation de pression au niveau du sol $\frac{dp}{dz}(z = 0)$ et l'altitude $z_{1/2}$ à partir de laquelle la pression est divisée par deux par rapport au sol $p(z_{1/2}) = \frac{p(0)}{2}$.
- Q3.** Enfin déterminez la pression au sommet de l'Everest à l'altitude $z_E = 8,8 \text{ km}$.

- Établir les équations locales de la statique des fluides.
- Résoudre les équations locales de la statique des fluides pour différents modèles: incompressible, gaz parfait isotherme, gradient de température, compressible ...
- Interpréter les valeurs numériques d'un champ de pression.
- Connaître et discuter les modèles incompressible et gaz parfait isotherme pour un champ de pression.