

Travaux dirigés du chapitre : 5.1 Magnétostatique

Partie : 5 Electromagnétisme

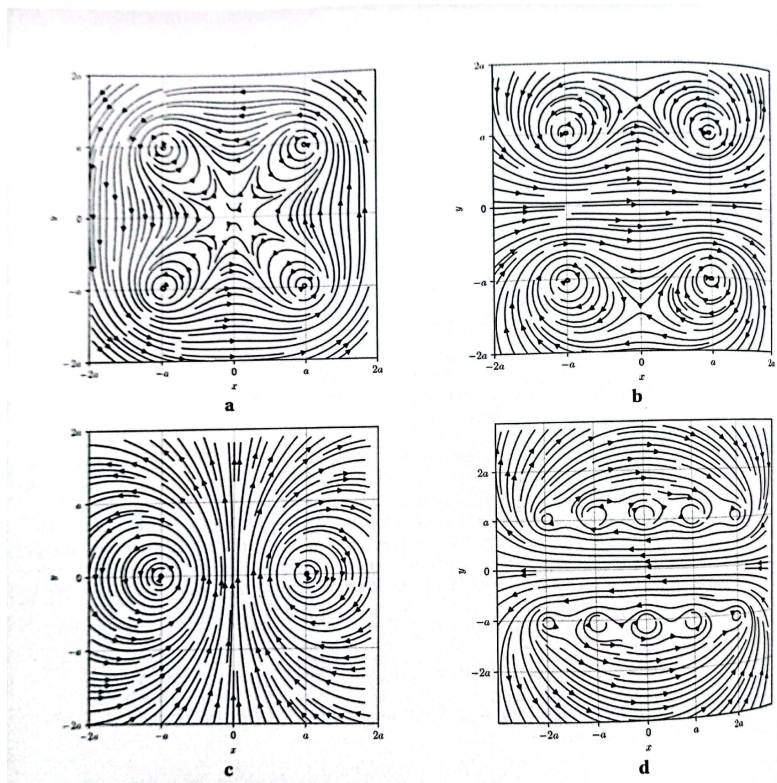
1 Propriétés du champ magnétostatique

1.1 Symétries et superpositions de champs magnétostatiques

1.1.1 Lignes de champ :

Les champs correspondant aux cartes représentées ci-après sont obtenus en superposant les champs magnétiques de fils infinis.

1. Commenter les cartes ci-après. En particulier discuter les symétries du champ magnétique, et déterminer :
 - les lieux où le champ magnétique est le plus intense ;
 - ceux où il est quasi-uniforme ;
 - l'orientation du courant parcourant les fils.



1.1.2 Bobines de Helmholtz

On considère deux spires de même rayon R , d'axe commun (Oz) , distantes de $2a$. Le champ produit par une spire en un point de son axe peut être calculé par la formule de Biot et Savart, et s'écrit :

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

où z est la distance du point au centre de la spire.

1. Justifier qualitativement la forme précédente du champ.
2. Calculer le champ en tout point de l'axe dans les cas où les deux spires sont parcourues par des courants I identiques et par des courants opposés ?
3. Quel est l'intérêt du dispositif dans chaque cas ?
4. On reprend le cas d'une spire seule. Le champ vérifie le théorème de la conservation du flux, si on l'applique à un cylindre mésoscopique sur l'axe (Oz) on en déduit l'équation :
$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Comment pourrait-on calculer le champ en un point proche de l'axe en utilisant cette équation ?

1.2 Calcul du champ magnétostatique pour des distributions à haut degré de symétrie

1.2.1 Bobine torique

Une bobine torique est un enroulement sur un support de forme torique (la forme d'une bouée). Le support torique est caractérisé par un rayon R autour de son axe de symétrie (Oz) et une section circulaire de rayon a . L'enroulement comporte N spires que l'on considérera comme des spires planes, circulaire de rayon a . On considère que le nombre N de spires est suffisamment grand pour que l'on puisse considérer les spires continûment réparties le long du tore.

On note I le courant circulant dans cette bobine.

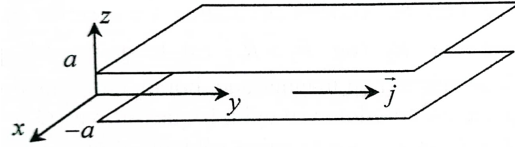
On repère la position d'un point M en coordonnées cylindriques (r, θ, z) autour de l'axe de symétrie du tore.

1. Montrer que le champ magnétostatique créé par cette bobine est orthoradial (selon $\vec{e}_\theta$) et que sa norme ne dépend pas de la coordonnée θ .
2. Calculer le champ à l'intérieur et à l'extérieur de la bobine en utilisant le théorème d'Ampère.
3. Qu'obtient-on si R est grand devant a et devant les dimensions de la zone d'espace considérée ?

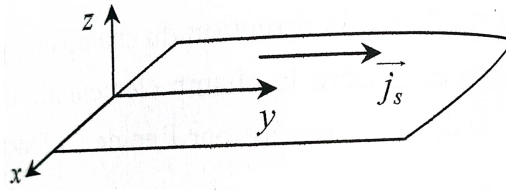
1.2.2 Nappe de courant volumique

On modélise une piste conductrice dans un circuit intégré, où les courants circulent sur de très faibles épaisseurs, par la distribution de courant suivante :

- pour $-a < z < a$: $\vec{j} = j_0 \vec{e}_y$
- pour $z < -a$ ou $z > a$: $\vec{j} = \vec{0}$

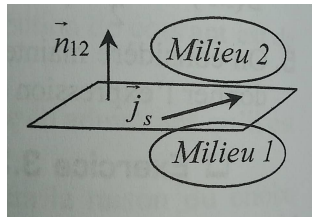


1. Analyser les symétries et invariances de cette distribution de courant. En déduire une information sur la parité de la fonction $B = f(z)$.
2. Déterminer le champ magnétique créé dans tout l'espace. Tracez l'allure de la norme du champ en fonction de z .
3. On passe à la limite surfacique en considérant que l'épaisseur e de la distribution volumique tend vers zéro : $e = 2a \rightarrow 0$, mais le produit $j_0 a$ reste constant.



Donner l'expression de la densité surfacique de courant $\vec{j}_s$ et celle du champ magnétique engendré partout dans l'espace. Le résultat est-il en accord avec la relation de passage pour $\vec{B}$ en présence de courants surfaciques ?

On donne la relation de passage qui traduit la continuité de la composante normale de $\vec{B}$ et la discontinuité de sa composante tangentielle en présence de courants surfaciques : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s(M) \wedge \vec{n}_{12}$ où $\vec{n}_{12}$ désigne le vecteur unitaire normal à la surface de séparation entre les deux milieux et est dirigé du milieu 1 vers le milieu 2. $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat de la surface.



2 Modèle du solénoïde :

2.1 Champs dans un solénoïde infini

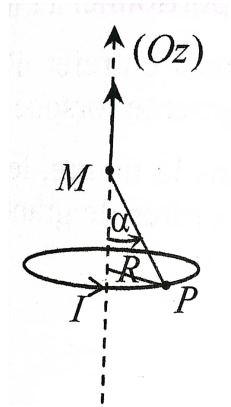
On considère un solénoïde infini d'axe (Oz) comportant n spires planes jointives par unité de longueur, chaque spire circulaire de rayon R est orthogonale à (Oz) et parcourue par un courant d'intensité I . On se place en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) (r, ϕ, z) rapportées au trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$.

1. Exprimer le nombre de spires par unité de longueur pour une portion de longueur de L de ce solénoïde. Discuter les hypothèses du modèle adopté ainsi que leur domaine de validité.
2. Montrer qu'en tout point M de l'espace, le champ créé par cette distribution de courant est de la forme $\vec{B}(M) = B_z(r)\vec{e}_z$
3. On cherche à exprimer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde en admettant qu'il est nul à l'extérieur de celui-ci.
 - (a) En appliquant le théorème d'Ampère à un contour dont on précisera la raison du choix, montrer que le champ magnétique en tout point de l'espace intérieur au solénoïde est uniforme.
 - (b) En déduire l'expression du champ intérieur en fonction de μ_0 , n et I .

2.2 Le solénoïde fini de spires jointives

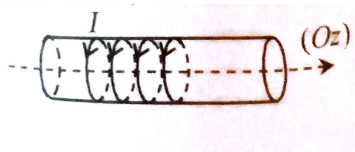
On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) , rapportées au trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

On admet qu'une spire circulaire de rayon R d'axe vertical (Oz) parcourue par un courant d'intensité constante I crée le champ $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{e}_z$, où M est un point de l'axe vu sous un angle α depuis un point de la spire (figure ci-dessous).



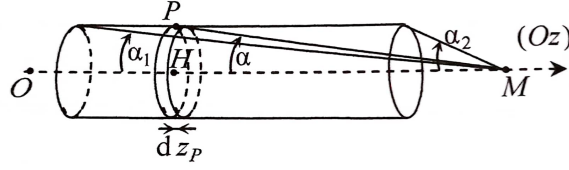
1. Vérifiez que ce champ est conforme à l'analyse de symétries de la distribution de courant.

On considère à présent un solénoïde de longueur finie d'axe (Oz) comprenant n spires jointives par unité de longueur, chaque spire circulaire de rayon R étant parcourue par un courant d'intensité I (voir figure ci-dessous)



Soit P un point quelconque de la surface du solénoïde et H son projeté orthogonal sur (Oz) .

On "découpe" le solénoïde en tranches élémentaires centrées sur un point H , d'épaisseur dz_P et vu sous un angle α depuis le point P (voir figure ci-dessous).



2. Quelle est la direction du champ créé par ce solénoïde en un point M de son axe ?
3. On considère le champ élémentaire $d\vec{B}_{\text{tranche}}(M)$ créé par l'une de ces tranches en un point M de l'axe repéré par l'angle en fonction de μ_0, I, R, n, α et dz_P dans un premier temps, puis en exprimant dz_P en fonction de $d\alpha$, donner $d\vec{B}_{\text{tranche}}(M)$ en fonction de μ_0, I, n, α et $d\alpha$ uniquement.
4. Montrer que finalement le champ en un point de l'axe est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{e}_z$$

5. On considère maintenant un solénoïde infini. Par un passage à la limite sur le cas précédent, donner l'expression du champ magnétique sur l'axe.

2.3 Énergie magnétostatique

L'énergie magnétique stockée dans un solénoïde infini a pour expression $U_m = \frac{1}{2} L I^2$, où L est le coefficient d'inductance propre du solénoïde et I l'intensité du courant qui le parcourt.

1. Sachant que pour une portion de longueur l d'un tel solénoïde on a $L = \mu_0 l n^2 S$, où S est sa section et n le nombre de spires par unité de longueur, en déduire l'expression de l'énergie magnétique dans le solénoïde en fonction du champ magnétique B .

2.4 Inductance

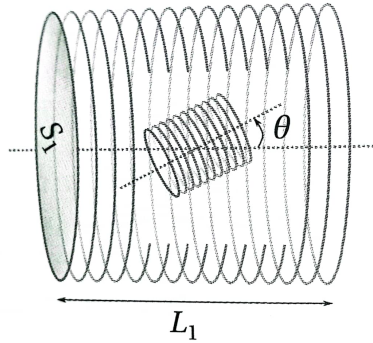
L'inductance propre L d'une bobine est définie par la relation $\Phi = L I$, où Φ est le flux au travers de la bobine du champ magnétostatique créé par la bobine elle-même et I le courant qui circule dans la bobine.

On considère un solénoïde comportant N spires, de rayon R et de longueur h . On se place dans l'approximation du solénoïde infini.

1. En utilisant l'expression du champ magnétostatique à l'intérieur d'un solénoïde infini, calculer le flux au travers d'une spire du solénoïde.
2. En déduire le flux au travers des N spires et en déduire l'inductance propre de la bobine.

2.5 Calcul d'un coefficient de mutuelle inductance

On considère un solénoïde de section S_1 , possédant N_1 spires, placé à l'intérieur d'un solénoïde, possédant N_2 spires, de section $S_2 > S_1$ et de longueur $L_2 > L_1$. Pour chaque solénoïde, on vérifie $L_i \gg \sqrt{S_i}$. On note θ l'angle entre les axes des deux solénoïdes. L'ensemble est schématisé ci-dessous :



1. Déterminer le coefficient de mutuelle inductance M entre les deux solénoïdes.

2.6 Cylindre infini en rotation autour de son axe :

Un long cylindre, supposé infini, de rayon R et chargé uniformément en volume avec la densité ρ , tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de son axe (Oz) relativement au référentiel du laboratoire. Le milieu a des propriétés identiques à celles du vide, et on suppose qu'il n'y a pas de charge surfacique.

1. Calculer la distribution de courant ainsi générée.
2. Calculer alors le champ magnétique.

3 Modèle du fil rectiligne de section non nulle

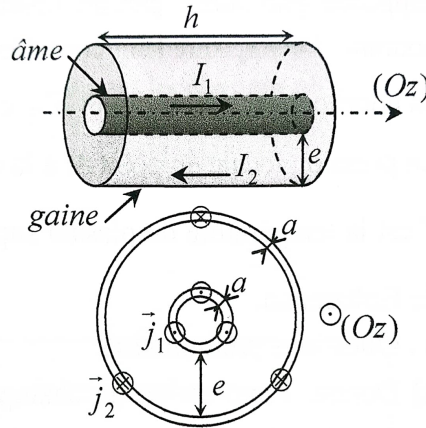
3.1 Câble coaxial en régime permanent

Un câble coaxial est constitué d'un conducteur plein de rayon r_1 traversé par un courant I , d'une couche isolante entre r_1 et r_2 , et d'un conducteur entre r_2 et r_3 permettant le retour du courant.

1. Déterminer la densité de courant en tout point du câble coaxial.
2. Donner les symétries et invariances du champ magnétique.
3. Calculer l'intensité du champ et tracer l'amplitude du champ en fonction du rayon.

3.2 Inductance linéique d'un câble coaxial

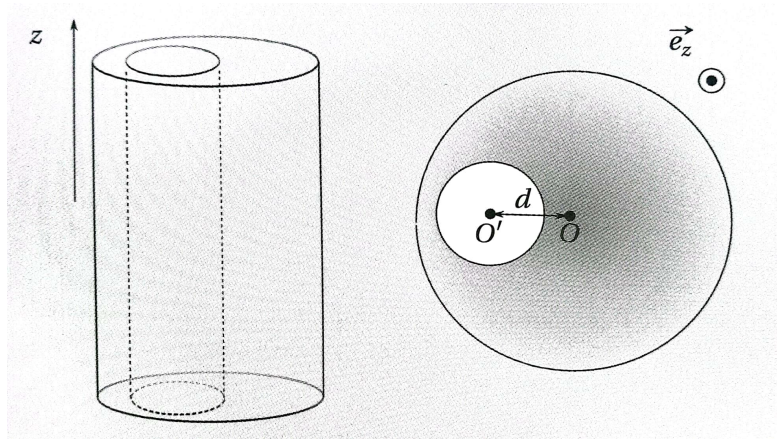
On modélise un câble coaxial par deux cylindres conducteurs parfait infinement longs de même axe (Oz), de sections circulaires. Le premier de rayon R_1 est appelé âme, et le second de rayon intérieur R_2 (où $R_2 > R_1$) est la gaine. L'espace entre l'âme et la gaine est rempli d'un diélectrique non magnétique, homogène, linéaire et isotrope, que l'on assimilera au vide. On se place en coordonnées cylindriques d'axe (Oz). On considère que l'âme véhicule une intensité $I_1 = I$, tandis que la gaine véhicule l'intensité opposée $I_2 = -I$. En régime lentement variable, nous considérerons que tout ce passe comme en magnétostatique sauf que les courants sont volumiques et considérés comme uniformément distribués sur une pellicule cylindrique de faible épaisseur a localisée au voisinage de la surface des conducteurs. On note $\vec{j}_1 = j\vec{e}_z$ et $\vec{j}_2 = -j\vec{e}_z$, les densités volumiques de courants correspondantes.



1. Donner les expressions de $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$ en fonction de I et de a .
2. La distribution surfacique est la limite d'une réalité volumique où les courants sont répartis sur une petite épaisseur a avec une densité volumique de courant $\vec{j}$, la densité surfacique correspondante est, si la distribution est uniforme, $\vec{j}_s = \lim_{a \rightarrow 0} (\vec{j}a)$.
Dans le cadre de cette modélisation, quelle serait l'expression des densités de courant surfaciques $\vec{j}_{s1}$ et $\vec{j}_{s2}$ associées.
3. Étudier les symétries et invariances de la distribution de courant et en déduire la direction du champ ainsi que sa dépendance spatiale.
4. En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour dont le choix sera justifié avec précision, donner l'expression du champ magnétostatique $\vec{B}$ en un point M dans l'espace à la distance $r = OM$ de l'axe (Oz) . Tracer l'allure de $\|\vec{B}\|$ en fonction des coordonnées spatiales d'intérêt.
5. On admet que l'énergie magnétique a pour expression $U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$ où L est l'inductance du solénoïde. On considère à présent une portion de longueur h de câble.
Sur quel volume v doit-on alors faire porter la triple intégrale $\iiint_v \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$? En déduire l'expression de l'inductance linéique L_l du câble en fonction de μ_0 , R_1 et R_2 .
Déterminer L_l pour $R_1 = 1 \text{ mm}$ et $R_2 = 2,5 \text{ mm}$. On rappelle que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.
6. On a montré que la capacité linéique d'un câble coaxial est donné par $C_l = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$.
Evaluer le produit de C_l par L_l .

3.3 Cavité dans un câble cylindrique :

On considère un câble cylindrique de rayon R parcouru par une densité de courant $\vec{j}$ uniforme et parallèle à l'axe du cylindre. Le fil comporte une cavité cylindrique de rayon $a < R$, entièrement située dans le câble et excentrée par rapport à son axe (les deux axes sont distants de d).

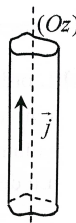


1. Calculez le champ magnétique dans tout l'espace par le câble sans cavité. Tracer sa norme en fonction de la distance à l'axe du câble.
2. Même question dans le cas où le courant est cette fois-ci réparti sur la surface latérale du câble. On considèrera que l'intensité totale reste la même que dans la question précédente.
3. Calculer le champ magnétique dans la cavité du câble lorsqu'il est parcouru par un courant volumique.

4 Problèmes :

4.1 Étude simplifié de la foudre

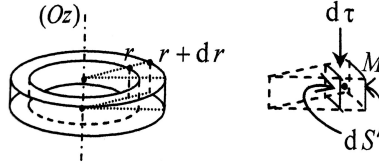
Durant un orage, la différence de potentiel entre la base des nuages orageux et le sol est telle que l'air s'ionise sur un trajet qu'emprunte la foudre. On modélise celle-ci comme une colonne cylindrique d'axe (Oz) , de rayon R , formée d'un plasma d'électrons animés d'une vitesse de dérive $\vec{V} = V\vec{e}_z$ supposée uniforme. On néglige la mobilité des atomes ionisés devant celle des électrons libres et on note $n(r)$ la densité particulière en électrons libres dont on suppose qu'elle ne dépend que de la distance $r = OM$ d'un point M de la colonne d'axe (Oz) . La colonne est ainsi supposée parcourue par un courant d'intensité I caractérisé par une densité volumique de courant $\vec{j} = j\vec{e}_z$ que l'on considère uniforme et permanent dans ce modèle simple. On se place en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) de coordonnées (r, ϕ, z) rapportées au trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$.



La pression locale au point M à la distance $r = OM$ de l'axe est donnée par $P(r) = n(r)k_B T$ où T est la température du plasma supposée uniforme et $k_B = \frac{R}{N_A} = 1,381.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ la constante de Boltzmann.

1. Questions préliminaires

- (a) Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ en un point M intérieur à la colonne en fonction μ_0 , de j et de la distance r du point M à l'axe (Oz) .
 - (b) Dans le cadre de l'hypothèse de densité volumique de courant uniforme, exprimer la vitesse $\vec{V}$ d'ensemble des porteurs de charge en fonction de la charge e de l'électron et de la densité particulaire moyenne n .
2. On considère un tore de plasma de section rectangulaire d'épaisseur comprise entre r et $r + dr$ et de hauteur dz . On note $dS = r d\theta dz$ un élément de sa surface latérale intérieure ou extérieure (les deux seront prises égales en première approximation) et $d\tau = r dr d\theta dz = dS dr$, l'élément de volume correspondant autour du point M à la distance r de l'axe.



- (a) Montrer que sous l'effet du champ magnétique, le tore de plasma tend à se contracter (phénomène de magnétostiction) au passage de la foudre. En dressant alors un bilan des forces s'exerçant à l'équilibre sur un élément de volume $d\tau = r dr d\theta dz$ de plasma, montrer que la pression cinétique dans la colonne satisfait à l'équation différentielle $\frac{dP(r)}{dr} + \alpha r = 0$ où α est une constante à déterminer en fonction de j et de μ_0 .
 - (b) En prenant pour référence de pression un point à la surface de la colonne de plasma en $r = R$, donner l'expression de la pression $P(r)$ ainsi que de la densité particulaire $n(r)$ en fonction de j , de μ_0 , de R et de r . En déduire la pression $P(0)$ et la densité particulaire $n(0)$ au centre de la colonne en un point de son axe.
3. (a) On désigne par N le nombre d'électrons par unité de longueur de la colonne de plasma. Montrer que la température T supposée uniforme dans la colonne est liée au courant total transporté I par la relation $N = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi k_B T}$.
- (b) L'ordre de grandeur typique du rayon de la colonne est de $R = 1$ mm. Elle véhicule un courant d'intensité de l'ordre de $I \approx 10^4$ A. On donne l'ordre de grandeur de la densité volumique moyenne en électrons libres (densité particulaire moyenne) égale à $n \approx 10^{25} \text{ m}^{-3}$. En déduire l'ordre de grandeur de la densité volumique de courant dans la colonne ainsi que celui de la vitesse de dérive. Estimer alors la température T qui règne dans la colonne ainsi que la pression $P(0)$ et la densité particulaire $n(0)$ en son centre.
- (c) Sachant que lorsque la vitesse de déplacement d'une tranche d'air est localement plus élevée que la vitesse du son dans l'air, une onde de choc se forme, associée à une onde sonore. Proposer une explication qualitative du tonnerre.

4.2 Impact de foudre

On modélise l'arrivée sur le sol d'un éclair avec des courants se répartissant dans le sol. L'éclair est modélisé par un fil infiniment fin parcouru par un courant d'intensité $I = 50$ kA. On utilisera les coordonnées sphériques de centre O le point d'impact de la foudre sur le sol.

1. Comment doit s'écrire la densité volumique de courant dans le sol pour que la loi des noeuds soit valide dans ce modèle ?
2. Analyser les symétries et invariances du champ $\vec{B}$.
3. Comment sont les lignes de champ magnétique ?
4. Calculer le champ magnétique dans le sol à l'aide du théorème d'Ampère.