

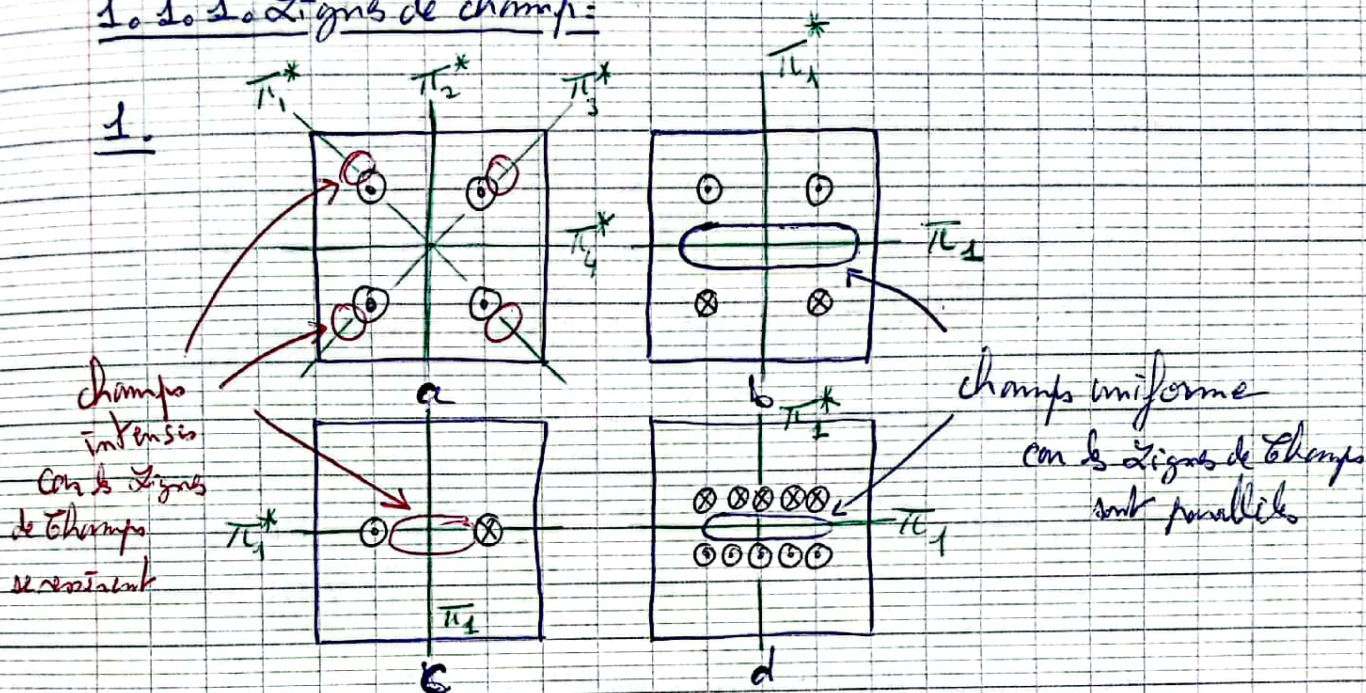
TD = Magnétostatique

1. Propriétés du champ magnétostatique

1.1. Symétries et superpositions de champs magnétostatiques

1.1.1. Lignes de champ:

1.

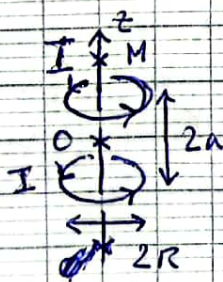


- ⊙ fils orientés vers nous
- ⊗ fils orientés vers la feuille
- π plan de symétrie du champ magnétostatique
- π^* plan d'anti-symétrie du champ magnétostatique

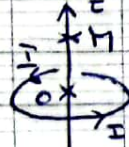
1.1.2. Bobines de Helmholtz

1.

2 spires

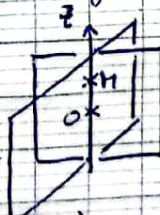


ou
1 spire



soit M un point de l'axe (Oz)

Les plans $(\pi, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(\pi, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont
des plans d'anti-symétrie de la distribution
de courants donc ce sont des
plans de symétrie du champ
magnétostatique



$$\text{ou } \pi \in (\pi, \vec{e}_x, \vec{e}_z) \Rightarrow \vec{B}(M) = B_x \vec{e}_x + B_z \vec{e}_z$$

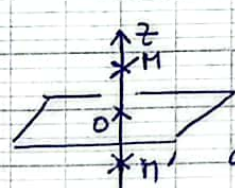
$$\text{ou } \pi \in (\pi, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \Rightarrow \vec{B}(M) = B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z$$

donc $\boxed{\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_z}$

En coordonnées cylindriques $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{e}_z$
 or si $M \in (Oz) \Rightarrow r=0$ donc $\vec{B}(M) = B(0, \theta, z) \vec{e}_z$

La distribution admet une invariance par réflexion autour de (Oz)
 donc $\boxed{\vec{B}(M) = B(0, z) \vec{e}_z}$

Le plan horizontal $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$
 symétrique de la distribution de
 c'est un plan d'anti-symétrie
 donc $\vec{B}(M) = B(z) \vec{e}_z = \vec{B}(M') = B(-z) \vec{e}_z$

 et un plan de
 symétrie donc
 des champs magnétiques

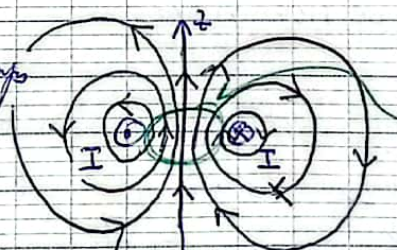
donc $\boxed{B(0, z) = B(0, -z)}$

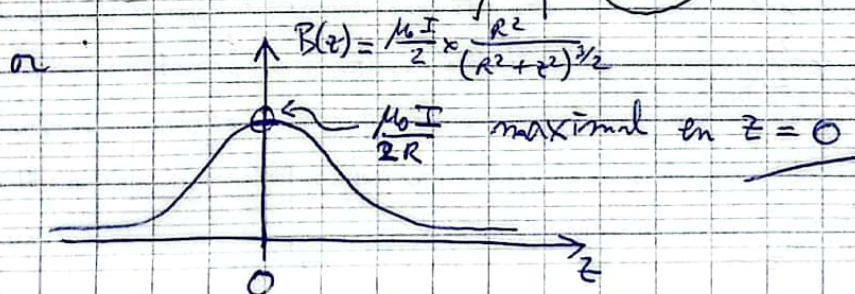
L'expression $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \times \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$ vérifie bien toutes ces
 propriétés.

homogénéité th. d'Analyse : $\mathcal{G}_L(\vec{B}) = \mu_0 \vec{I}$ dans $\Rightarrow [B] \times L = [\mu_0] \times I$
 $\Rightarrow [B] = \frac{[\mu_0] \times I}{L}$

et $\left[\frac{\mu_0 I}{2} \times \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right] = [\mu_0] \times I \times \frac{L^2}{(L^2)^{3/2}} = \frac{[\mu_0] \times I}{L}$

donc l'expression est bien homogène.

Enfin les courbes de champs  champ intense pour $z \rightarrow 0$
 car la $\mathcal{L}$ de $\mathcal{B}$ se résout



2. On suppose les deux champs $\vec{B} = \vec{B}(\text{spire en } -a) + \vec{B}(\text{spire en } +a)$

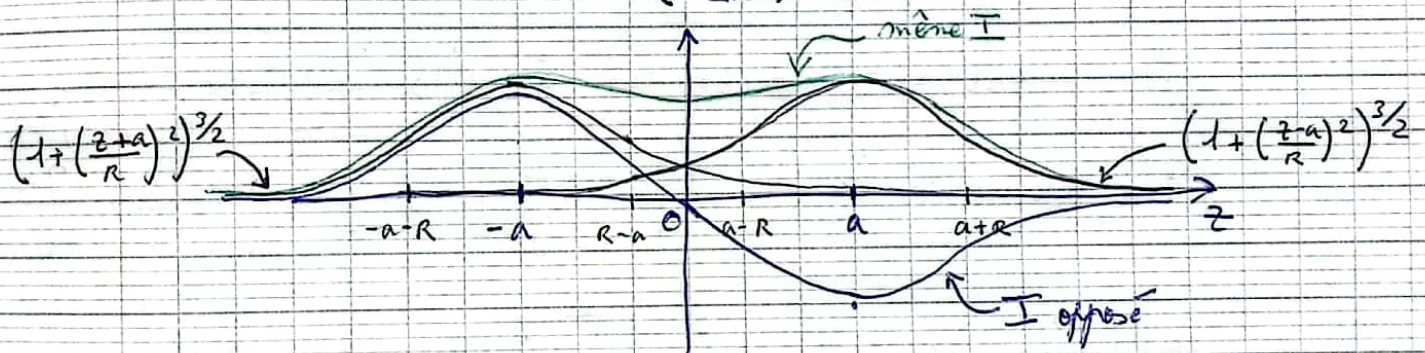
si même I : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \times \frac{R^2}{(R^2 + (z+a)^2)^{3/2}} \vec{e}_z + \frac{\mu_0 I}{2} \times \frac{R^2}{(R^2 + (z-a)^2)^{3/2}} \vec{e}_z$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left[\left(1 + \left(\frac{z+a}{R}\right)^2\right)^{3/2} + \left(1 + \left(\frac{z-a}{R}\right)^2\right)^{3/2} \right] \vec{e}_z$$

si I opposés :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left[\left(1 + \left(\frac{z+a}{R}\right)^2\right)^{3/2} - \left(1 + \left(\frac{z-a}{R}\right)^2\right)^{3/2} \right] \vec{e}_z$$

3. On trace ~~B(z)~~ $B(z) / \left(\frac{\mu_0 I}{2R}\right)$



en ajustant le support $\frac{a}{R}$ convenablement on peut créer un champ uniforme en $z=0$ avec des courants I identiques et un champ qui varie linéairement en $z=0$ avec des courants I opposés.

$$4. \quad \frac{1}{r} \times \frac{\partial(n B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{donc } \frac{\partial(n B_r)}{\partial r} = -r \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\text{or } B_z \approx \frac{\mu_0 I}{2} \times \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{proche de l'axe}$$

$$\text{donc } \frac{\partial B_z}{\partial z} \approx \frac{\mu_0 I}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \times (2z)$$

$$\text{donc } \frac{\partial(n B_r)}{\partial r} \approx r \times \frac{3\mu_0 I}{2} \times \frac{z R^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}}$$

on intègre entre 0 et r

$$\text{donc } n B_r(r, z) - 0 \times B_r(0, z) \approx \left(\frac{r^2}{2} - 0\right) \times \frac{3\mu_0 I}{2} \times \frac{z R^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\text{donc } B_r(r, z) \approx \frac{3\mu_0 I}{4} \times \frac{R^2 \times r \times z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \approx \frac{\mu_0 I}{2} \times \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \times \frac{3 r z}{2(R^2 + z^2)}$$

$$\text{donc } \vec{B}(r, z) \approx \frac{\mu_0 I}{2} \times \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \left[\frac{3 r z}{2(R^2 + z^2)} \vec{e}_r + \vec{e}_z \right]$$

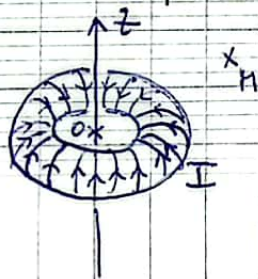
avec $r \ll R$

$$\text{soit } \vec{B}(r, z) \approx \frac{r}{2} \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z} \vec{e}_r + B_z(0, z) \vec{e}_z$$

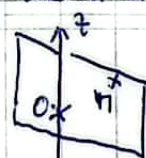
1.2. Calcul du champ magnétostatique pour des distributions à haut degré de symétrie

1.2.1. Bobine torique

1.



Pour tout point M de l'espace le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant



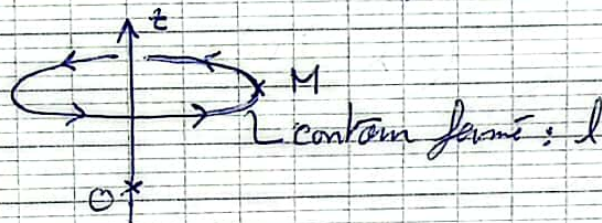
donc $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan d'orthogonalité du champ $\vec{B}$

or $M \in (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ donc $\vec{B}(M) \perp (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ donc $\boxed{\vec{B}(M) \parallel \vec{e}_\theta}$

Il y a invariance par rotation autour de (Oz) de la distribution de courant donc $\vec{B}$ est invariant aussi

$$\text{donc } \boxed{\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta}$$

2. Comme $\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta$ les lignes de champ sont des cercles horizontaux centrés sur l'axe (Oz) , on choisit donc comme contour fermé une ligne de champ passant par M



Théorème d'Ampère : $\oint_l (\vec{B}) = \mu_0 I_{\text{enc}}^{\text{enc}} l$

$$\text{donc } \oint_{M \in l} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}^{\text{enc}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{or } \vec{B}(M) \parallel \vec{e}_\theta \\ d\vec{l} \parallel \vec{e}_\theta \end{array} \right\}$$

$$\text{donc } \oint_{M \in l} B(M) dl = \mu_0 I_{\text{enc}}^{\text{enc}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{or } B(M) = B(r, z) \\ r = \text{cte} \text{ cercle} \\ z = \text{cte} \text{ horizontal} \end{array} \right\}$$

$$\text{donc } B(r, z) \times \oint_{M \in l} dl = \mu_0 I_{\text{enc}}^{\text{enc}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{or } l = 2\pi r \text{ périmètre} \\ \text{du cercle} \end{array} \right\}$$

$$\text{donc } B(r, z) \times (2\pi r) = \mu_0 I_{\text{enc}}^{\text{enc}}$$

Si M est à l'intérieur du tore :



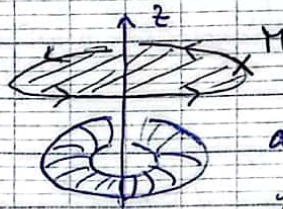
N spires parcourues par un courant I
Donc $I_{\text{enc}}^{\text{enc}}$ en sens indirect

$$\begin{array}{c} \times \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \times \end{array} \sim l \quad \text{donc } I_{\text{enc}}^{\text{enc}} = -NI$$

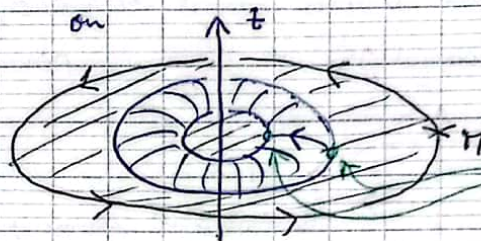
donc $B(r, z) = \frac{\mu_0 (-NI)}{2\pi r}$

donc $\vec{B}_{interieur} = -N \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

si M est à l'extérieur =



aucun courants n'est enlacé par le contour

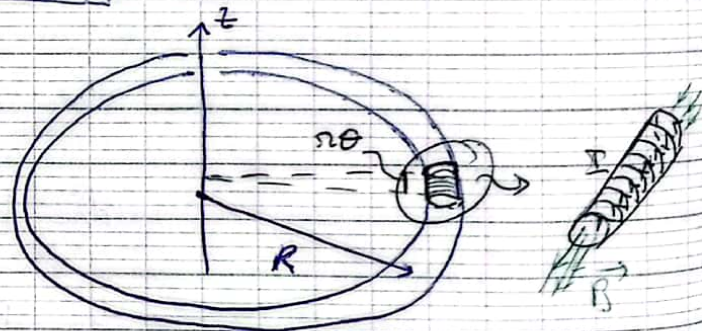


les courants enlacés s'annulent deux à deux

donc $I_{enlacé} = 0$

donc $\vec{B}_{exterieur} = \vec{0}$

3. Si $R \gg a$ et no, z



on peut approximer la portion de l'axe par un solénoïde infini

et $\vec{B}_{exterieur} = \vec{0}$ comme un solénoïde infini

$\vec{B}_{interieur} = -N \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \approx \mu_0 \left(\frac{N}{2\pi R} \right) \times I \times (-\vec{e}_\theta)$ uniforme

comme pour un solénoïde infini

$\approx n$
densité de spires

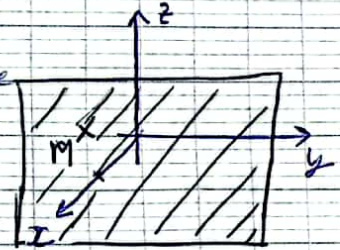
direction de la règle de la main droite

1.2.2. Rése de courant volumique

1. Pour tout point M de l'espace le plan $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant
 donc $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est un plan d'anti-symétrie de $\vec{B}$

on a $M \in (M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ donc $\vec{B}(M) \perp (M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$$\text{donc } \boxed{\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_x}$$

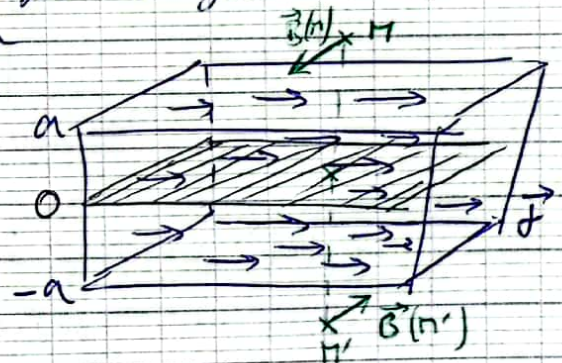


La distribution de courant est invariante par translation selon $\vec{e}_z$
 donc $\vec{B}$ aussi donc $\vec{B}(M) = B(y, z) \vec{e}_x$

La distribution de courant est invariante par translation selon $\vec{e}_y$
 donc $\vec{B}$ aussi donc $\boxed{\vec{B}(M) = B(z) \vec{e}_x}$

Le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant donc c'est un plan d'anti-symétrie de $\vec{B}$

$$\text{donc } \vec{B}(M) = B(z) \vec{e}_x = -\vec{B}(M') \\ = -B(-z) \vec{e}_x$$

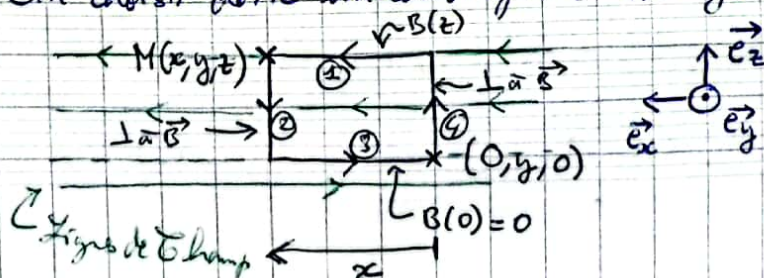


$$\text{donc } \boxed{B(z) = -B(-z)}$$

La fonction $B(z)$ est impaire et notamment $\boxed{B(0) = 0}$

2. $\vec{B}(M) = B(z) \vec{e}_x$ donc les lignes de champs sont des droites de direction $\vec{e}_x$

On choisit donc un contour fermé rectangulaire dans le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$



Théorème d'Ampère : $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \Rightarrow \oint_{\Gamma \in L} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$

or $L = \{1 \cup 2 \cup 3 \cup 4\}$ donc $\int_{\Gamma \in 1} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma \in 2} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma \in 3} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma \in 4} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$

$\Gamma \in 1$
 $= B(z) \times x$
car $\vec{B} \parallel d\vec{l}$
 et $0(z) = dz$

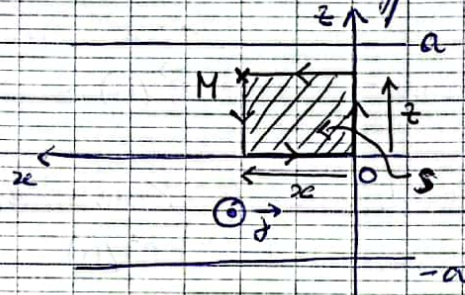
$\Gamma \in 2$
 $= 0$
car $\vec{B} \perp d\vec{l}$

$\Gamma \in 3$
 $= 0$
car $\vec{B} = \vec{0}$

$\Gamma \in 4$
 $= 0$
car $\vec{B} \perp d\vec{l}$

donc $x \times B(z) = \mu_0 I_{\text{enc}}$

si $|z| < a$: Γ à l'intérieur de la nappe de courant



$I_{\text{enc}} = \iint_{\Gamma \in S} \vec{j}(r) \cdot d\vec{S}$

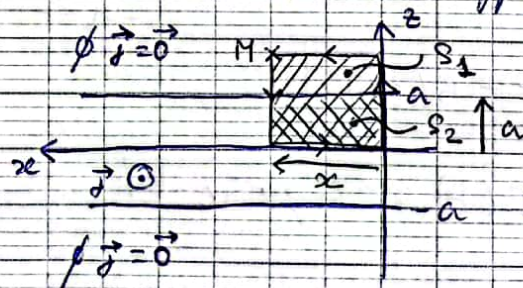
or $\vec{j}$ uniforme et $\perp$ à S

donc $I_{\text{enc}} = j_0 \times (2z)$

donc $x B(z) = \mu_0 j_0 \times z$

donc $\boxed{\vec{B}_{\text{interieur}} = \mu_0 j_0 z \vec{e}_x}$

si $|z| > a$: Γ à l'extérieur de la nappe de courant



$I_{\text{enc}} = \iint_{\Gamma \in S} \vec{j}(r) \cdot d\vec{S}$

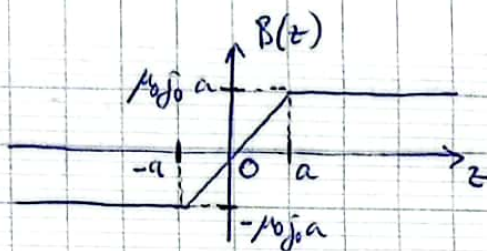
$I_{\text{enc}} = \iint_{\Gamma \in S_2} \vec{j}(r) \cdot d\vec{S} + \iint_{\Gamma \in S_1} \vec{j}(r) \cdot d\vec{S}$

or $\vec{j}$ uniforme et $\perp$ à S_2 $= 0$ car $\vec{j} = \vec{0}$

$I_{\text{enc}} = j_0 \times x (\pm a)$

donc $x B(z) = \mu_0 j_0 \times (\pm a)$

donc $\boxed{\vec{B}_{\text{exterieur}} = \pm \mu_0 j_0 a \vec{e}_x}$



3. La densité surfacique de courant $\vec{j}_s = j_s \vec{e}_y$ avec $j_s = j_0 \times 2a = d_2$

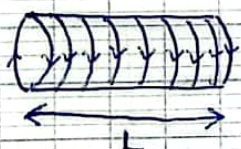
$$\text{et } \begin{cases} \text{si } z > 0, & \vec{B} = \frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_x \\ \text{si } z < 0, & \vec{B} = -\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \vec{B}_2 - \vec{B}_1 &= \frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_x - \left(-\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_x \right) = \mu_0 j_s \vec{e}_x \\ \text{et } \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} &= \mu_0 j_s \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \mu_0 j_s \vec{e}_x \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{d'où la relation} \\ \text{de passage} \end{array} \right\} \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

2. Modèle du solénoïde

2.1. Champ dans un solénoïde infini

1.



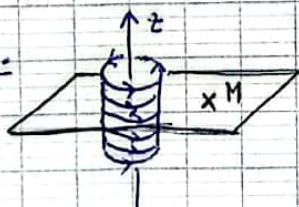
pour une portion L de solénoïde il ya $N = n \times L$ spires.

solénoïde infini $\Rightarrow$ on étudie le champ loin des bords

spires planes $\Rightarrow$ fils fin compensés à L

spires jointives de densité n $\Rightarrow$ on n'étudie pas le champ au niveau des spires.

2.

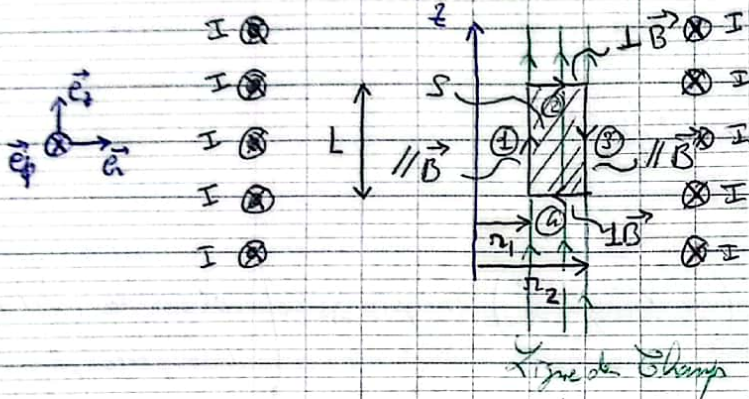


Pour tout point M le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant donc c'est un plan d'anti-symétrie de $\vec{B}$, or $M \in (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$ donc $\vec{B}(M) \perp (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$ donc $\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_z$

La distribution de courant est invariante par rotation autour de $(O, \vec{e}_z)$ donc $\vec{B}$ aussi donc $\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_z$

Le solénoïde est infini donc la distribution de courant est invariante par translation selon $\vec{e}_z$ donc $\boxed{\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_z}$

3. (a) $\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_z$ donc les lignes de champs sont des droites selon $\vec{e}_z$ donc on choisit comme contour fermé un rectangle dans le plan $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ à l'intérieur du solénoïde ($r_1 < r_2 < R$)



Théorème d'Ampère : $\oint_C (\vec{B}) = \mu_0 I_{\text{enc}}$

donc $\oint_{\text{AEL}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} = 0$
on décompose sm ①, ②, ③, ④

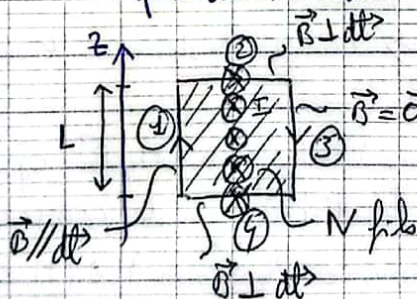
donc $\int_{r_1 \rightarrow ①} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{② \rightarrow r_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{r_2 \rightarrow ③} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{④ \rightarrow r_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$
 $= B(r_1) \times L$ car $\vec{B} \parallel d\vec{l}$ et uniforme sm ①
 $= 0$ car $\vec{B} \perp d\vec{l}$
 $= -B(r_2) \times L$ car $\vec{B} \parallel d\vec{l}$ et uniforme sm ③
 $= 0$ car $\vec{B} \perp d\vec{l}$

donc $B(r_1) \times L - B(r_2) \times L = 0$

donc $B(r_1) = B(r_2) = B_{\text{intérieur}} = \text{cte}$

donc $\boxed{\vec{B} = B_{\text{intérieur}} \vec{e}_z \text{ uniforme}}$

3. (b) On choisit un contour fermé avec r_2 à l'extérieur ($r_2 > R$) et r_1 à l'intérieur $r_1 < R < r_2$



Théorème d'Ampère : $\oint_C (\vec{B}) = \mu_0 I_{\text{enc}}$
 $\oint_{r_1 \rightarrow ①} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$

donc $\int_{r_1 \rightarrow ①} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{② \rightarrow r_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{r_2 \rightarrow ③} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{④ \rightarrow r_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 N \times I$
 $= B_{\text{intérieur}} \times L$ car $\vec{B} \parallel d\vec{l}$ et $\vec{B}$ uniforme
 $= 0$ car $\vec{B} \perp d\vec{l}$
 $= 0$ car $\vec{B} = 0$
 $= 0$ car $\vec{B} \perp d\vec{l}$

donc $B_{\text{extérieur}} \times L = \mu_0 n \times L \times I$

donc $\boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z}$

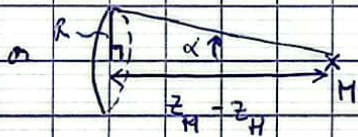
2.2. Le solénoïde fait de spires jointives

1. Le plans $(n, \vec{e}_n, \vec{e}_z)$ et $(n, \vec{e}_0, \vec{e}_z)$ sont des plans d'anti-symétrie de la distribution de courant donc de symétrie de $\vec{B}$ $\Rightarrow \forall n \in (n, \vec{e}_n, \vec{e}_z)$ et $\forall n \in (n, \vec{e}_0, \vec{e}_z)$ donc $\vec{B}(n) \in (n, \vec{e}_n, \vec{e}_z) \cap (n, \vec{e}_0, \vec{e}_z)$
donc $\boxed{\vec{B}(n) = B(n) \vec{e}_z}$



2. D'après les propriétés de symétrie $\vec{B}(n) = B(n) \vec{e}_z$
D'après la règle de la main droite $B(n) > 0$

3. $\boxed{d\vec{B}_{\text{branche}}(n) = \frac{\mu_0 \times (n dz_p) \times I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{e}_z}$ il y a $n dz_p$ spires dans la branche



$$\text{donc } \tan(\alpha) = \frac{R}{z_M - z_H} \Rightarrow (z_M - z_H) = \frac{R}{\tan(\alpha)}$$

$$\text{donc } d(z_M - z_H) = R \times d\left(\frac{1}{\tan(\alpha)}\right)$$

$$\text{donc } -dz_p = R \times \frac{-d\alpha}{\sin^2(\alpha)}$$

$$\text{donc } dz_p = \frac{R}{\sin^2(\alpha)} d\alpha$$

$$\boxed{d\vec{B}_{\text{branche}}(n) = \frac{\mu_0 n I}{2} \sin(\alpha) d\alpha \vec{e}_z}$$

4. On suppose que tout le champ $\vec{B}(n) = \int d\vec{B}_{\text{branche}}(n) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 n I}{2} \sin(\alpha) d\alpha \vec{e}_z$

$$\text{donc } \vec{B}(n) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin(\alpha) d\alpha \right) \vec{e}_z$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{B}(n) = \frac{\mu_0 n I}{2} (-\cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_1)) \vec{e}_z}$$

5. Si le solénoïde est infini $\alpha_1 \rightarrow 0$ et $\alpha_2 \rightarrow \pi$ donc $\vec{B}(n) = \frac{\mu_0 n I}{2} (-\cos(\pi) + \cos(0)) \vec{e}_z$

$$\text{donc } \boxed{\vec{B}(n) = \mu_0 n I \vec{e}_z}$$

2.3. Énergie magnétostatique

1.  $U_m = \frac{1}{2} L I^2$ or $L = \mu_0 l n^2 S$

donc $U_m = \frac{\mu_0 l S n^2 I^2}{2}$

donc $U_m = \frac{l S \times (\mu_0 n I)^2}{2 \mu_0}$

or dans un solénoïde infini $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$

donc $U_m = \frac{l S \times B^2}{2 \mu_0}$

or $l \times S = V$ volume du solénoïde



donc $U_m = V \times \left(\frac{B^2}{2 \mu_0} \right)$ — Énergie magnétique volumique

2.4. Inductance

1. Dans un solénoïde infini $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$, ici il y a N spires sur une longueur l
donc $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l} I \vec{e}_z$

Le flux à travers une spire de rayon R est $\Phi_1 = \iint_{\pi R^2} \vec{B}(r) \cdot d\vec{S}$ or $\vec{B} \perp d\vec{S}$ et $d\vec{B}$ uniforme

donc $\Phi_1 = B \times S$

donc $\Phi_1 = \mu_0 \frac{N}{l} I \times (\pi R^2)$

2. Avec N spires les flux s'ajoutent donc $\Phi = N \times \Phi_1$

donc $\Phi = \mu_0 \frac{N^2}{l} I \times (\pi R^2)$

donc $\Phi = \pi \frac{\mu_0 R^2 N^2}{l} \times I$

donc $L = \pi \frac{\mu_0 R^2 N^2}{l}$

2.5. Calcul d'un coefficient de mutuelle inductance

1. L'inductance mutuelle M peut se définir comme $\mathcal{U}_{21} = M \frac{d\mathcal{I}_1}{dt}$ ← $\mathcal{U}_{21}$: volt dans le circuit 2
 - flux induit dans le circuit 2

on dérive la loi de Faraday $\mathcal{U}_{21} = -e_{21} = + \frac{d\phi_{21}}{dt}$ ← flux à travers le circuit 2 du dipôle généré par $\mathcal{I}_1$

donc on peut aussi définir $\phi_{21} = M \mathcal{I}_1$

or $\mathcal{I}_1$ génère un champ $\vec{B}_1 = \mu_0 n_1 \mathcal{I}_1 \vec{e}_{z_1} = \frac{\mu_0 N_1 \mathcal{I}_1}{L_1} \vec{e}_{z_1}$

uniforme à l'intérieur du circuit 2



donc $\phi_{21} = N_2 \times \phi_{\text{une ligne}} = N_2 \times \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$ or $\vec{B}_1$ uniforme

donc $\phi_{21} = N_2 \times \vec{B}_1 \cdot (S_2 \vec{e}_{z_2})$

or $\vec{e}_{z_1} \cdot \vec{e}_{z_2} = \cos(\theta)$

donc $\phi_{21} = N_2 \times \frac{\mu_0 N_1 \mathcal{I}_1}{L_1} \times S_2 \cos \theta$

or $\phi_{21} = M \mathcal{I}_1$

donc $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \sqrt{S_1 S_2}}{\sqrt{L_1 L_2}} \times \frac{L_2 S_2}{L_1 S_1} \cos \theta$

avec $L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{l_1}$ les inductances propres des deux solénoïdes

et $L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 S_2}{l_2}$

$$M = \sqrt{L_1 \times L_2} \times \sqrt{\frac{V_2}{V_1} \cos \theta}$$

↑
moyenne géométrique des inductances propres

↑
rapport des volumes de champ partagés

↑
inclinaison de champ

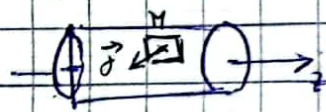
et V_1 et V_2 les volumes des deux solénoïdes

$$\text{on } M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \times S_2 \cos \theta}{L_1}$$

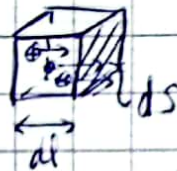
2.6. Cylindre infini en rotation autour de son axe :

1. $\rho = \frac{dq}{dV}$ ← densité de charge
 $q = \int \rho dV$ ← charge infinitésimale
 $dq = \rho dV$ ← en volume élémentaire

comme le cylindre tourne son axe en coordonnées cylindriques la vitesse de charges est $\vec{v}(r) = r\omega \vec{e}_\phi$.
Donc $\vec{j}(r) = j(r) \vec{e}_\phi$ et on choisit $d\vec{S} = dS \vec{e}_\phi = dr dz \vec{e}_\phi$



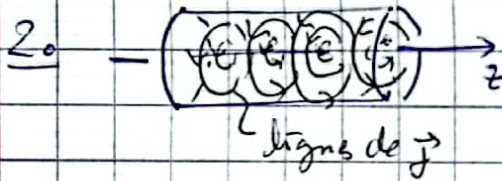
Les charges qui traversent dS pendant dt parcourent la distance $dl = v(r)dt$ donc se trouvent dans $dV = dl dS$



donc les charges qui traversent dS est $dq = \rho dr = \rho dl dS = \rho(r) dS dt$

Le courant élémentaire associé est $di = \vec{j} \cdot d\vec{S} = j(r) dS$ (car $j(r) = \rho v(r)$)
et $di = \frac{dq}{dt} = \rho v(r) dS$

donc $\boxed{\vec{j}(r) = \rho \times r \omega \vec{e}_\phi}$ (on vérifie $\vec{j} = \rho \vec{v}(r)$)



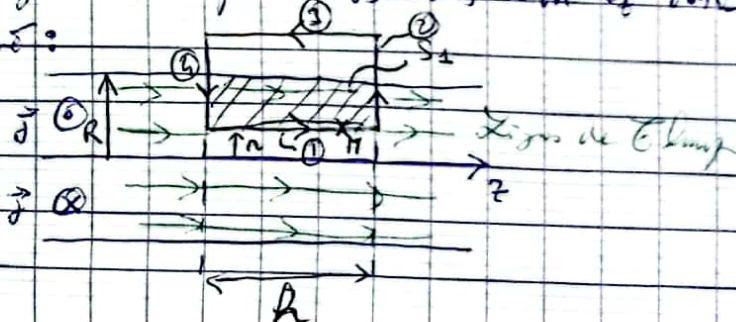
La distribution de courant admet le plan $(r, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$ comme plan de symétrie
or $r \in (r, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$ donc $\vec{B}(r) \perp (r, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$

donc $\boxed{\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_z}$

La distribution de courant est invariante par rotation autour de $(\vec{e}_z)$ donc $\vec{B}$ aussi
donc $\boxed{\vec{B}(r) = B(r, z) \vec{e}_z}$

La distribution de courant est invariante par translation selon $\vec{e}_z$ donc $\vec{B}$ aussi
donc $\boxed{\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_z}$

Les lignes de charges sont des droites selon $\vec{e}_z$ donc on choisit un contour fermé :



Théorème d'Ampère : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \Rightarrow \oint \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$

donc $\int_{r \in \text{①}} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} + \int_{r \in \text{②}} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} + \int_{r \in \text{③}} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} + \int_{r \in \text{④}} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{j}(r) \cdot d\vec{S} + 0$

$= B(r) \times h$ $= 0$ $= 0$ $= 0$

car $\vec{B} \parallel d\vec{l}$ et $B(r) = dr$ $\text{car } \vec{B} \perp d\vec{l}$ par hyp $\text{car } \vec{B} \perp d\vec{l}$

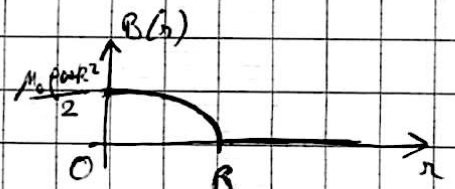
$\text{à l'extérieur du cylindre}$ $\text{sur la face supérieure ou inférieure}$

donc $h \times B(r) = \mu_0 \int_0^R \int_0^h (\rho \omega) \times dr dz = \mu_0 \rho \omega h \int_0^R r dr = \mu_0 \rho \omega h \left(\frac{R^2 - r^2}{2} \right)$

donc $B(r) = \mu_0 \rho \omega \frac{R^2 - r^2}{2}$

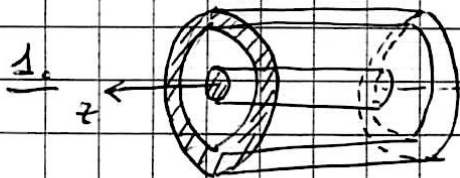
donc $\vec{B}_{\text{interieur}}(r) = \mu_0 \rho \omega \frac{R^2 - r^2}{2} \vec{e}_z$

et $\vec{B}_{\text{exterieur}}(r) = \vec{0}$



3. Modèle du fil rectiligne de section non nulle

3.1. Câble coaxial en régime permanent



pour $0 < r < r_1$: $I = \iint_{r \in S} \vec{j}(r) \cdot d\vec{S}$ or $\vec{j} \parallel d\vec{S}$

donc $I = j \times S$ et $\vec{j}$ uniforme

donc $I = j \times \pi r_1^2$

donc $\vec{j}(r) = \frac{I}{\pi r_1^2} \vec{e}_z$

pour $r_1 < r < r_2$ = couche isolante

donc $\vec{j}(r) = \vec{0}$

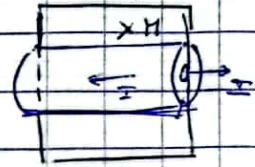
pour $r_2 < r < r_3$: $-I = \iint_{r \in S} \vec{j}(r) \cdot d\vec{S}$ or $\vec{j} \parallel d\vec{S}$ et $\vec{j}$ uniforme

donc $-I = j \times S$

donc $-I = j \times (\pi r_3^2 - \pi r_2^2)$

donc $\vec{j}(r) = -\frac{I}{\pi (r_3^2 - r_2^2)} \vec{e}_z$

2. Pour tout point M le plan $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant
 or $M \in (r, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ donc $\vec{B}(M) \perp (r, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$



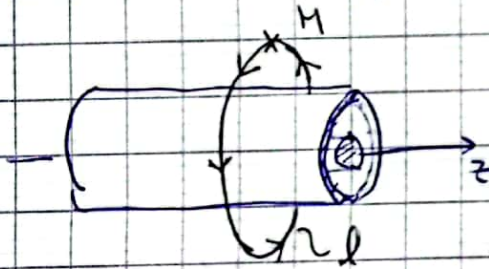
donc $\boxed{\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta}$

La distribution de courant est invariante par rotation autour de $(O, \vec{e}_1)$
 donc $\vec{B}$ aussi donc $\boxed{\vec{B}(r) = B(r, z) \vec{e}_\theta}$

La distribution de courant est invariante par translation selon $\vec{e}_1$
 donc $\vec{B}$ aussi donc $\boxed{\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_\theta}$

3. $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta$ donc les lignes de champs sont des cercles centrés sur l'axe $(O, \vec{e}_1)$ dans le plan $(\vec{e}_1, \vec{e}_\theta)$.

On choisit une ligne de champ comme contour fermé passant par M



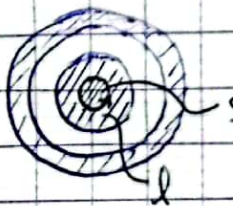
Théorème d'Ampère = $\oint_C (\vec{B}) = \mu_0 I_{enc}$

donc $\oint_{\text{rel}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$

or $\vec{B} \parallel d\vec{l}$ et $dl = r d\theta$

donc $B(r) \times (2\pi r) = \mu_0 I_{enc}$

• si $0 < r < R$:



$I_{enc} = \int_{S \subset S} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S} = j \times S$ car $\vec{j} \parallel d\vec{S}$

$I_{enc} = \frac{I}{\pi R^2} \times \pi r^2$

donc $B(r) = \mu_0 \frac{\frac{I}{\pi R^2} \times \pi r^2}{(2\pi r) \times (\pi R^2)} = \mu_0 \frac{I}{2\pi R^2} \times \frac{r}{R}$

donc $\boxed{\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{I}{2\pi R^2} \times \frac{r}{R} \vec{e}_\theta}$

si $r_1 < r < r_2$:



$I_{\text{enclos}} = I$

donc $B(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$

donc $\boxed{\vec{B}(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$

si $r_2 < r < r_3$:



$I_{\text{enclos}} = I + \iint_{r_2 < r' < r} \vec{j}(r') \cdot d\vec{S}$

$\rightarrow \vec{j} \parallel d\vec{S}$
et $\vec{j}$ uniforme

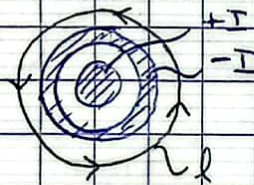
$I_{\text{enclos}} = I + j \times S$

$I_{\text{enclos}} = I - \frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)} \times \pi(r^2 - r_2^2)$

donc $I_{\text{enclos}} = I \times \frac{(r_3^2 - r_2^2) - (r^2 - r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2}$

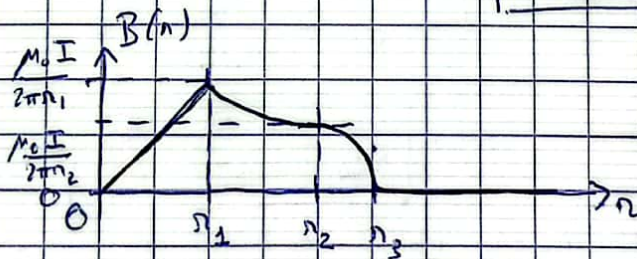
donc $\boxed{\vec{B}(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \times \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} \vec{e}_\theta}$

si $r_3 < r$:



$I_{\text{enclos}} = I - I = 0$

donc $\boxed{\vec{B}(r) = \vec{0}}$



3.2. Inductance linéique du câble coaxial

1. $I = \iint_{r_2 < r' < r} \vec{j}_1(r') \cdot d\vec{S} = j_1 \times S$ car $\vec{j}_1 \parallel d\vec{S}$ et $\vec{j}_1$ uniforme

donc $I = j_1 \times \pi (R_1^2 - (R_1 - a)^2)$

donc $\boxed{\vec{j}_1 = \frac{I}{\pi R_1^2 (1 - (1 - \frac{a}{R_1})^2)} \vec{e}_z} = \frac{I}{\pi R_1^2} (1 - (1 - \frac{a}{R_1})^2)^{-1} \vec{e}_z$

$$-I = \int_{\text{Hes}} \vec{j}_2(r) \cdot d\vec{S} = j_2 \times S \quad \text{car } \vec{j}_2 \parallel d\vec{S} \text{ et } \vec{j}_2 \text{ uniforme}$$

$$\text{donc } -I = j_2 \times \pi \left((R_2 + a)^2 - R_2^2 \right)$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{j}_2 = \frac{-I}{\pi R_2^2 \left(\left(1 + \frac{a}{R_2}\right)^2 - 1 \right)} \vec{e}_z} = \frac{-I}{\pi R_2^2} \left(\left(1 + \frac{a}{R_2}\right)^2 - 1 \right)^{-1} \vec{e}_z$$

2. si $a \rightarrow 0$: $a \ll R_1$ donc $\vec{j}_1 \approx \frac{I}{\pi R_1^2} \times \left(1 - \left(1 - 2\frac{a}{R_1} \right) \right)^{-1} \vec{e}_z$

$$\text{donc } \vec{j}_1 \approx \frac{I}{\pi R_1^2} \times \frac{R_1}{2a} \vec{e}_z$$

$$\text{donc } \vec{j}_1 \approx \frac{I}{2\pi R_1 a} \vec{e}_z$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{j}_{S1} = \frac{I}{2\pi R_1} \vec{e}_z}$$

$$a \ll R_2 \text{ donc } \vec{j}_2 \approx \frac{I}{\pi R_2^2} \times \left(1 + 2\frac{a}{R_2} - 1 \right)^{-1} \vec{e}_z$$

$$\text{donc } \vec{j}_2 \approx \frac{I}{\pi R_2^2} \times \frac{R_2}{2a} \vec{e}_z$$

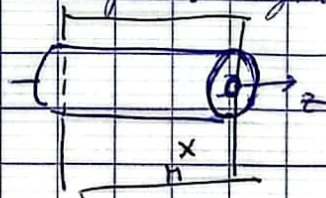
$$\text{donc } \vec{j}_2 \approx \frac{I}{2\pi R_2 a} \vec{e}_z$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{j}_{S2} = \frac{I}{2\pi R_2} \vec{e}_z}$$

3. Pour tout point M le plan $(\pi, \vec{e}_1, \vec{e}_0)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant

à $M \in (\pi, \vec{e}_1, \vec{e}_0)$ donc $\vec{B}(M) \perp (\pi, \vec{e}_1, \vec{e}_0)$

$$\text{donc } \boxed{\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_0}$$



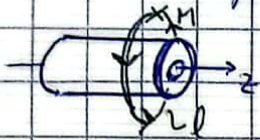
La distribution est invariante par rotation autour de $(O, \vec{e}_z)$

$$\text{donc } \vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_0$$

La distribution est invariante par translation selon $\vec{e}_z$

$$\text{donc } \boxed{\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_0}$$

4. Les lignes de champs sont des cercles dans le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ centrés sur l'axe on choisit comme contour fermé la ligne de champ passant par M.

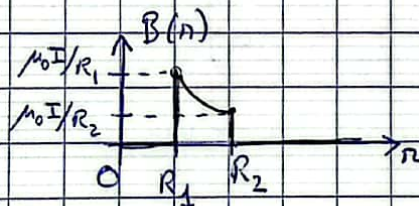


théorème d'Ampère : $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \Rightarrow \oint_{\theta=0}^{2\pi} B(r) \cdot r d\theta = \mu_0 I_{\text{enc}}$
 car $\vec{B} \parallel d\vec{l}$ et $r d\theta = dl$ sur le cercle
 donc $B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enc}}$

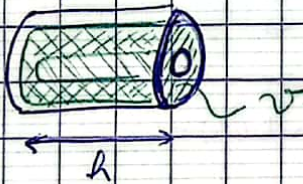
si $0 < r < R_1 =$ $I_{\text{enc}} = 0 \Rightarrow B(r) = 0$
 $\Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \vec{0}}$

si $R_1 < r < R_2 =$ $I_{\text{enc}} = +I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
 $\Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$

si $R_2 < r =$ $I_{\text{enc}} = +I - I \Rightarrow B(r) = 0$
 $\Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \vec{0}}$



5.



le champ $\vec{B} \neq \vec{0}$ dans l'espace entre les deux conducteurs donc on intègre sur ce volume

$$V = \begin{cases} 0 \leq z \leq h \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

$$U_{\text{em}} = \int_{z=0}^h \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{\mu_0^2 I^2}{(2\pi)^2 r^2} r dr d\theta dz$$

$$U_{\text{em}} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \times h \times 2\pi \times \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{1}{2} L I^2$$

donc $\boxed{L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \times h}$ donc $\boxed{L_l = \frac{L}{h} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

$$AN = L_e = 1,8 \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

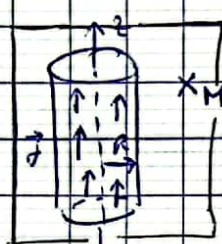
$$6. L_e \times C_e = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} \times \frac{\mu_0}{2\pi} \times \ln(R_2/R_1) = \epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$L_e C_e = \epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

célérité de la lumière dans le vide.

3.3. Cavité dans un câble cylindrique -

1. câble sans cavité



$(r, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ plan de symétrie de la distribution de courant
 $\vec{j} = j(r, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$

donc $\vec{B}(r) \perp (r, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$

$$\text{donc } \boxed{\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_\theta}$$

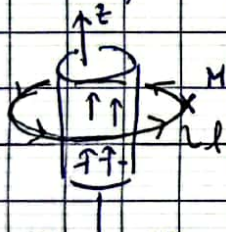
distribution de courant invariante par rotation autour de $(O, \vec{e}_z)$

$$\text{donc } \vec{B}(r) = B(r, z) \vec{e}_\theta$$

distribution de courant invariante par translation selon $\vec{e}_z$

$$\text{donc } \boxed{\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_\theta}$$

Contour fermé = cercle horizontal de rayon r - ligne de champ



$$\text{Théorème d'Ampère} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{enc}} \Rightarrow \oint_{\text{cercle}} \vec{B}(r) \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

$$\text{car } \vec{B} \parallel d\vec{s} \text{ et } B(r) = \text{cte}$$

$$\text{donc } 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

si $r < R$:



$$I_{\text{enc}} = \iint_{M \in S} \vec{j}(r) \cdot d\vec{S} = j \times S \text{ car } \vec{j} \parallel d\vec{S} \text{ et } \vec{j} \text{ uniforme}$$

$$= j \times \pi r^2$$

$$\text{donc } B(r) = \mu_0 j \frac{r}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 \frac{j r}{2} \vec{e}_\theta}$$

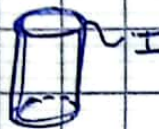
si $R < r$:



$$I_{\text{enc}} = \iint_{M \in S} \vec{j}(R) \cdot d\vec{S} = j \times S \text{ car } \vec{j} \parallel d\vec{S} \text{ et } \vec{j} \text{ uniforme}$$

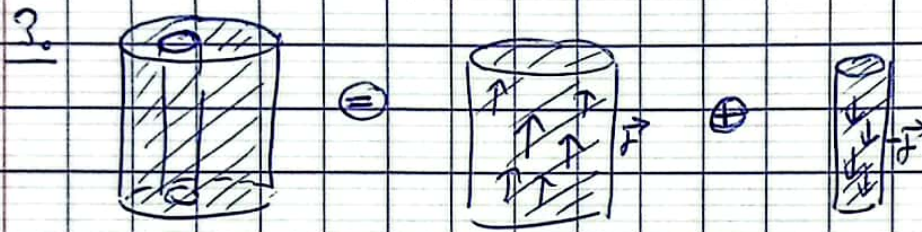
$$= j \times \pi R^2$$

$$\text{donc } B(r) = \mu_0 \frac{j R^2}{2r} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 \frac{j R^2}{2r} \vec{e}_\theta}$$

2.  alors rest I alors qui change

si $r < R$:  $\Rightarrow I_{\text{alors}} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{0}}$

si $R < r$:  $\Rightarrow I_{\text{alors}} = I \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi R} \vec{e}_\theta}$ avec $I = \pi R^2 j$



on a l'intégration de cylindres $\vec{B} = \mu_0 j \frac{R^2}{2} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0}{2} (j \vec{e}_z) \wedge (R \vec{e}_r)$

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2} j \wedge \vec{OM}$ et $\vec{B}'(M) = \frac{\mu_0}{2} (-j) \wedge \vec{O'M}$

donc $\vec{B}_{\text{courbe}} = \frac{\mu_0}{2} j \wedge \vec{OM} - \frac{\mu_0}{2} j \wedge \vec{O'M} = \frac{\mu_0}{2} j \wedge (\vec{OM} + \vec{O'O})$

donc $\boxed{\vec{B}_{\text{courbe}} = \frac{\mu_0}{2} j \wedge \vec{OO'}}$

$\vec{B}_{\text{courbe}}$ uniforme
et $\|\vec{B}_{\text{courbe}}\| = \frac{\mu_0 j d}{2}$

