

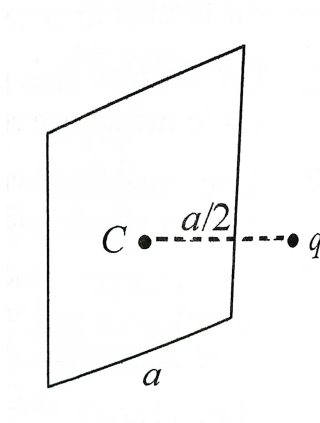
Travaux dirigés du chapitre : 5.2 Électrostatique

Partie 5 : Electromagnétisme

1 Distribution discrètes de charges

1.1 Calcul de flux :

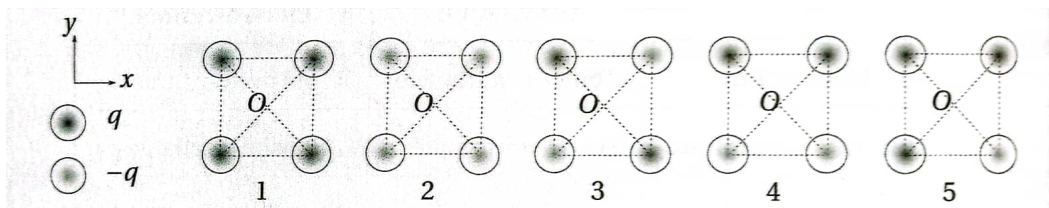
Soit une charge ponctuelle q placée à une distance $\frac{a}{2}$ et perpendiculairement à la surface du centre C d'un carré de côté a .



1. En utilisant le théorème de Gauss calculer le flux du champ créé par la charge au travers du carré.

1.2 Étude de distributions de charges ponctuelles

1. Calculer le champ et le potentiel au centre du carré dans les configurations suivantes :



La diagonale du carré vaut $2a$ et on supposera que le potentiel à l'infini est nul.

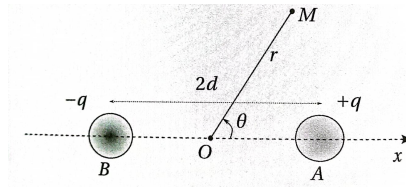
2. Quels sont les plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution 3 ? Commenter alors les résultats précédents.

3. Calculer l'expression de l'énergie contenue dans une distribution quelconque de charges ponctuelles. Quelle est l'énergie électrostatique totale contenue dans chacune des distributions de charges ci-dessus ?
4. On reprend la configuration numéro 3 ci-dessus. Calculer le potentiel en un point M de coordonnées (x, y) proche de l'origine. Commenter.

1.3 Le dipôle électrostatique

Cet exercice montre comment utiliser le principe de superposition pour calculer le potentiel puis le champ électrostatique d'une distribution s'écrivant comme une somme de distribution élémentaires.

1. Rappeler l'expression du champ et du potentiel électrostatiques générés en un point M par une charge ponctuelle q placée au point A .
2. On considère une deuxième charge $-q$, placée en un point B , à distance $2d$ de la première. L'axe passant par les 2 charges est noté (Ox) et l'origine O est placée au centre des deux charges. L'abscisse de A est $x_A = +d$ et celle de B est $x_B = -d$.



- (a) Calculer le champ et le potentiel produit par les deux charges en un point M situé à une distance r de l'origine.
 - (b) Lorsque $r \gg d$, montrer que le potentiel s'écrit : $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{BA} \cdot \vec{OM}}{r^3}$
3. En déduire l'expression du champ électrostatique loin des deux charges.

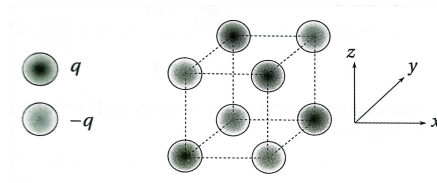
1.4 Lignes de champ et équipotentielles : le dipôle

En utilisant l'expression du champ et du potentiel d'un dipôle électrostatique $\vec{p}$ données ci-dessous, trouvez :

1. l'équation d'une ligne de champ de $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\vec{p} \cdot \vec{OM} - \vec{p})$,
2. l'équation d'une équipotentielle de $V(r) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{r^3}$

1.5 Calcul d'une force électrostatique

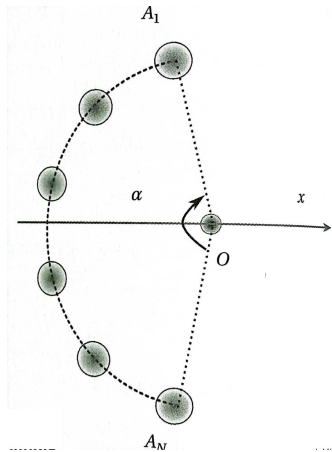
Des charges sont disposées sur les huit sommets d'un cube de côté a , de manière à ce que les deux charges occupant des sommets voisins soient de signe opposé (voir dessin).



1. Calculer la force s'exerçant sur chacune des charges et commenter.

1.6 N charges ponctuelles

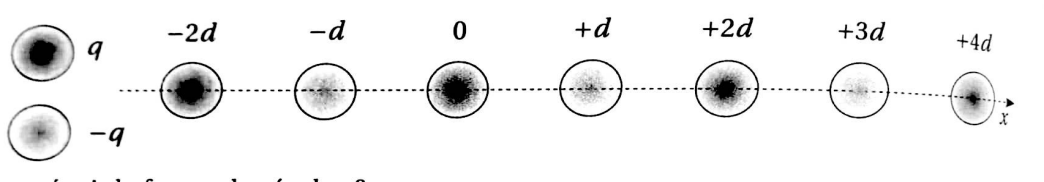
On considère une distribution de charge constituée de N charges ponctuelles q , réparties de sorte à être équidistantes sur un arc de cercle de rayon R , d'angle α et de centre O . Les points auxquels se trouvent les charges sont notés $A_1, A_2, \dots, A_N$.



1. Déterminer le champ en O .
2. Que devient le résultat lorsque les charges sont uniformément réparties sur tout le cercle ?

1.7 Potentiel créé par une chaîne infinie

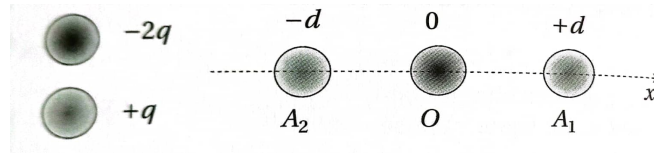
On considère une chaîne infinie d'ions, espacés régulièrement d'une distance a . Les sites pairs sont occupés par des ions de charge q et les sites impairs par des ions de charge $-q$. On se propose de calculer l'énergie d'interaction de la chaîne. On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln(2)$



1. Peut-on prévoir la forme du résultat ?
2. On s'intéresse d'abord à une charge q placée en $x = 0$. Quel est le potentiel créé par cette charge dans tout l'espace ?
3. On place une charge $-q$ en $x = a$. Quelle est son énergie potentielle dans le champ créé par la première charge ? Même question pour une troisième charge q placée en $x = 2a$.
4. En déduire l'énergie potentielle W d'un ion de la chaîne infinie.

1.8 Un exemple de quadrupole

On considère 3 charges ponctuelles alignées sur l'axe (Ox) : une charge négative $-2q$ placée à l'origine O et deux charges positives q placées en A_1 d'abscisses $x = +d$ et A_2 d'abscisse $x = -d$. Soit P un point repéré par sa distance r à O et par l'angle θ entre $\overrightarrow{OP}$ et l'axe (Ox) .



1. Calculer le potentiel créé en P par cette distribution de charges, dans le cas général et dans le cas où $r \gg d$.
2. Commenter.

2 Distribution continues de charges

2.1 Géométrie sphérique

2.1.1 Champ créé par une sphère chargée en surface

On considère une sphère de centre O et de rayon R à la surface de laquelle est uniformément distribuée une charge de densité surfacique σ . On se place en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) de centre O auxquelles on associe le trièdre direct $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$.

1. Étudier les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charge. En déduire, par utilisation du théorème de Gauss, l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en tout point M de l'espace (intérieur et extérieur). On justifiera très soigneusement le choix de la surface de Gauss au vu de l'étude des symétries et d'invariances.
2. Tracer l'allure de la norme du champ en fonction de r et commentez en particulier le comportement du champ au passage de la surface chargée en $r = R$. Commentez en utilisant la relation de passage du champ électrostatique en présence de charges surfaciques (donnée en fin d'énoncé).

On donne la relation de passage pour $\vec{E}$ en présence de charges surfaciques séparant deux milieux 1 et 2 de part et d'autre de cette surface chargée est : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$ où $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat de la surface. $\vec{n}_{12}$ est le vecteur unitaire normal localement à cette surface et est dirigé du milieu 1 vers le milieu 2. Cette relation traduit la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ et la discontinuité de sa composante normale en présence de charges surfaciques.

3. Dédurre de l'expression du champ, l'expression du potentiel électrostatique en fonction de r , en prenant $V = 0$ à l'infini.
4. En déduire une relation entre le champ et le potentiel électrostatique en $r = R$, puis conclure sur le lien entre le résultat trouvé et l'effet de pointe : "le champ est d'autant plus intense que le rayon de courbure des conducteurs est faible".

2.1.2 Calculs de champ électriques

Calculer le champ électrique produit dans tout l'espace par les distributions suivantes :

1. Une couche sphérique d'épaisseur d uniformément chargée ρ en volume, située à la distance moyenne R d'un point O . On proposera deux méthodes différentes.
2. Une cavité sphérique de rayon R_1 et de centre O_1 située à une distance d du centre d'une sphère de rayon R uniformément chargée ρ en volume. La cavité est entièrement située dans la sphère. On ne s'intéressera ici qu'au champ dans la cavité.

2.1.3 Superposition de deux distributions sphériques

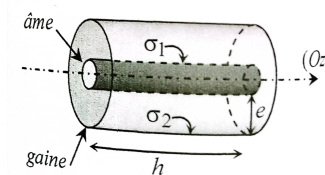
On considère deux distributions sphériques, de rayon identique R et de densités volumiques homogènes $\pm\rho$, dont les centres O_1 et O_2 sont décalés de $a \ll R$.

1. Montrer qu'on réalise ainsi une couche sphérique de rayon R chargée en surface avec une densité $\sigma = \sigma_0 \cos(\theta)$, où θ est l'angle entre la droite (O_1O_2) et le vecteur $\vec{r}$ dont on prend l'origine au milieu de O_1O_2 .
2. Calculer le champ électrostatique de la distribution ainsi obtenue en un point éloigné des deux sphères.

2.2 Géométrie cylindrique

2.2.1 Capacité linéique d'un câble coaxial

On modélise un câble coaxial par deux cylindres conducteurs parfaits infiniment longs de même axe (Oz) , de sections circulaires. Le premier de rayon R_1 est appelé âme et est porté au potentiel $V_1 > 0$, et le second de rayon intérieur R_2 (où $R_2 > R_1$) est la gaine, portée au potentiel $V_2 < V_1$. L'espace entre l'âme et la gaine est rempli d'un diélectrique que l'on assimilera ici à du vide. Une portion de câble de longueur h forme ainsi un condensateur cylindrique dont les armatures sont constituées des surfaces conductrices en regard. On néglige les effets de bord, c'est-à-dire que l'on considère que le champ entre les armatures est le même que si la hauteur h était infinie. On cherche à exprimer ici sa capacité.



Pour cette portion de câble, on désigne par σ_1 la densité surfacique de charges supposée uniforme à la surface de l'âme et par σ_2 celle que porte la surface intérieure de la gaine.

L'équilibre électrostatique étant réalisé, on admet que dans les conducteurs formant l'âme et la gaine le champ est nul ainsi que la densité volumique de charge. Les surfaces des deux conducteurs en regard sont porteuses de charges égales en norme et de signe opposé. On posera $e = R_2 - R_1$, l'espacement radial entre les armatures. On se place en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) .

1. Dans quelle mesure les effets de bord sont-ils raisonnablement négligeables ? Donner dans le cadre de ce modèle la relation entre σ_1 et σ_2 .

2. (a) En raisonnant sur le câble supposé infini, étudier les symétries et les invariances de la distribution de charge. Quelles en sont les conséquences pour le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$ en un point M dans l'espace entre les armatures ?
- (b) En appliquant le théorème de Gauss à une surface fermée Σ dont on justifiera très soigneusement le choix, exprimer le champ électrostatique qui règne dans le diélectrique entre les deux cylindres. En déduire la différence de potentiel U entre l'âme et la gaine.
- (c) En généralisant la définition de la capacité d'un condensateur plan $C = \frac{Q}{U}$ où Q est la charge portée par son armature positive et U la différence de potentiel entre les armatures, exprimer la capacité linéique du câble notée C_l en fonction de ϵ_0 , R_1 et R_2 .
- (d) Déterminer C_l pour $R_1 = 1 \text{ mm}$ et $R_2 = 2,5 \text{ mm}$.

2.2.2 Ligne bifilaire

Une ligne bifilaire est constituée de deux conducteurs rectilignes cylindriques de rayon a parallèles entre eux et séparés par une distance h telle que $h \gg a$. On se place dans l'approximation d'une ligne infinie.

Dans un premier temps, on considère un seul conducteur, centré sur l'axe (Oz) , et on note λ la charge par unité de longueur.

1. Sachant que la charge se répartit uniformément sur la surface du conducteur, donner l'expression de cette charge surfacique σ en fonction de λ et de a .
2. Déterminer le champ électrique créé à l'extérieur du conducteur ($r > a$).
3. En déduire le potentiel créé à l'extérieur du conducteur.

On donne le gradient en coordonnée cylindrique :

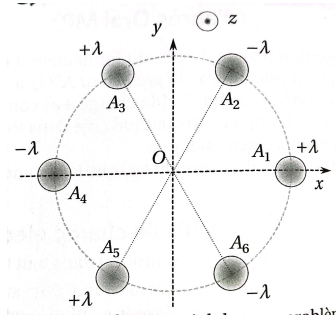
$$\vec{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \times \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

On considère maintenant les deux conducteurs, l'un portant la charge linéique $-\lambda$ et l'autre la charge linéique $+\lambda$.

4. Donner l'expression du potentiel créé par cette ligne bifilaire en un point situé à l'extérieur des conducteurs.
5. Déterminer la différence de potentiel entre les deux conducteurs en fonction de λ , ϵ_0 et a .
6. En considérant une longueur l de ligne bifilaire, en déduire la capacité par unité de longueur associée à cette ligne.

2.2.3 Piège hexapolaire

On considère la configuration ci-contre, où 6 fils infinis, disposés parallèlement à l'axe (Oz) , sont placés en des points équidistants le long d'un cercle de rayon a , comme dans le schéma ci-dessous.



Trois fils ont une densité linéique de charge $+\lambda$, trois autres une densité linéique de charge $-\lambda$, comme indiqué sur le schéma. On cherche à connaître le potentiel au voisinage du centre O . Dans cet exercice, on notera i le nombre imaginaire.

1. Quelles sont les symétries auxquelles obéissent le champ électrostatique et le potentiel dans ce problème ?
2. Rappeler l'expression du potentiel généré par un fil infini dans tout l'espace.
3. En choisissant le potentiel nul sur l'axe central, montrer que le potentiel en un point P quelconque s'écrit :

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{PA_2 \times PA_4 \times PA_6}{PA_1 \times PA_3 \times PA_5} \right)$$

4. En écrivant les coordonnées du point P sous forme d'affixe complexe $z = re^{i\theta}$, montrer :

$$\frac{PA_2 \times PA_4 \times PA_6}{PA_1 \times PA_3 \times PA_5} = \left| \frac{a^3 + z^3}{a^3 - z^3} \right|$$

5. Enfin, montrer qu'au voisinage de l'axe central, on trouve

$$V(r, \theta) \simeq \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{a} \right)^3 \cos(3\theta)$$

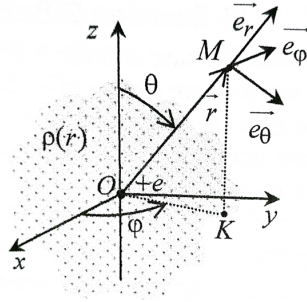
Commenter.

3 Problèmes

3.1 Potentiel de Yukawa

Le modèle classique de l'atome d'hydrogène dans lequel l'électron décrit une orbite circulaire autour du noyau ne permet pas de rendre compte de la stabilité de l'édifice atomique. En effet, un électron accéléré rayonne un champ électromagnétique dont l'énergie est empruntée à son énergie cinétique. Ainsi en orbitant, l'électron devrait voir son énergie cinétique diminuer, ce qui réduirait le rayon de son orbite jusqu'à qu'il "tombe" sur le noyau.

Cet échec de la théorie classique de l'atome conduit à remplacer, dans un modèle quantique, la notion de trajectoire par celle de probabilité de présence de l'électron.



On modélise alors l'atome dans son état fondamental comme suit : on considère une densité volumique de charge électronique à symétrie sphérique $\rho(r)$ traduisant le fait que la charge $-e$ de l'électron est diffuse dans tout l'espace autour du noyau supposé ponctuel au point O et de charge $+e$ et on note : $V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$ le potentiel associé à cette distribution de charge au point M à la distance $r = OM$ du noyau.

1. (a) Quelle est la dimension de a ? Donner l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ correspondant.
 (b) En analysant les cas $r \gg a$ et $r \ll a$, donner une interprétation du paramètre a .
 (c) On donne $E(a) \simeq 10^{11} \text{ V.m}^{-1}$, en déduire l'ordre de grandeur de a . Commenter.
2. On cherche à présent à exprimer, par des équations locales, la densité volumique de charge $\rho(r)$ relative à ce modèle de l'atome.

En appliquant le théorème de Gauss à un élément mésoscopique en coordonnées sphérique nous pouvons montrer ici que la norme du champ électrostatique $E(r)$ vérifie l'équation

$$\text{différentielle : } -\frac{dE(r)}{dr} - \frac{2}{r}E(r) + \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = 0$$

- (a) En prenant $\rho(r)$ sous la forme $\rho(r) = f(r) \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, déterminez $f(r)$ une fonction de r à déterminer en fonction de e , a et r . Vérifiez alors que la charge totale Q_{elec} relative à la distribution électronique dans tout l'espace entourant le noyau, correspond à celle de l'électron.

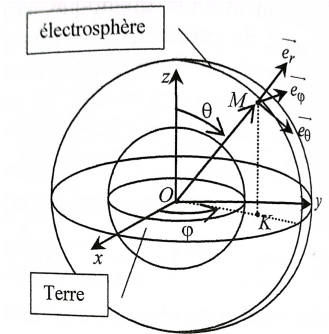
$$\text{On donne } \int_0^{+\infty} r \exp\left(-\frac{r}{a}\right) dr = a^2$$

- (b) Exprimer le flux de $\vec{E}$ à travers une sphère de rayon r ainsi que la charge totale contenue dans cette surface fermée dans les deux cas limites : $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow +\infty$. Comparer la contribution de la charge électronique contenue dans la sphère de rayon r à la charge portée par le noyau. Les résultats sont-ils en adéquation avec l'expression du flux ? Dans le cas où r est de l'ordre de a , on parle d'écrantage partiel de la charge du noyau par celle de l'électron. Justifier qualitativement cette terminologie. Dans quel cas y a-t-il absence d'écrantage ? Dans quel cas a-t-on écrantage total ?

3.2 Étude du système Terre-électrosphère

Au delà d'une altitude h de environ 60 km, la conductivité de l'atmosphère (sous l'effet de l'ionisation de ses composants par le rayonnement solaire) est suffisante pour que cette dernière soit équipotentielle, on appelle cette région l'électrosphère. On la modélise par une surface qui potentielle sphérique de rayon $r = R + h$ où R est le rayon de la Terre supposée sphérique, de potentiel $V = V_h = cte$, possédant une charge totale $+Q$ uniformément répartie en surface et

de densité surfacique σ . D'autre part, on assimile la Terre, de rayon R et de centre O , à un conducteur parfait de potentiel nul portant une charge négative $-Q$ où $Q > 0$ uniformément répartie sur sa surface.



L'ensemble de ces deux conducteurs forme ainsi un condensateur sphérique dont l'armature intérieure est la Terre et dont l'électrosphère constitue l'armature extérieure. On assimile la permittivité de l'atmosphère à la permittivité du vide. En réalité, l'air est faiblement conducteur et un faible courant de fuite entre les armatures décharge rapidement le condensateur Terre-électrosphère. Ce sont les transferts de charge, sous l'effet de la convection dans les nuages orageux, qui rechargent le condensateur et assurent une différence de potentiel de 360 kV entre l'électrosphère et le sol.

On se place en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) de centre O auxquelles on associe le trièdre direct $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$.

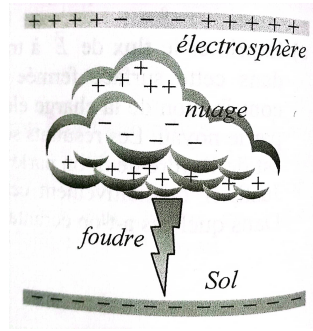
1. Étudiez les propriétés de symétries et d'invariance de la distribution de charge. En déduire la forme du champ $\vec{E}$ et du potentiel V électrostatique.
2. En appliquant le théorème de Gauss à une surface dont le choix sera clairement justifier, déterminez l'expression du champ électrostatique en fonction de la charge portée par la Terre à l'altitude r où $0 < r < h$.

3. A l'aide de l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \times \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \times \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

Déterminez l'expression du potentiel V à l'altitude r où $0 < r < h$.

4. Exprimez la charge portée par la Terre en fonction de V_h , R , h et ϵ_0 .
5. A l'altitude $h = 60$ km, on mesure un potentiel $V_h \simeq 360$ kV (référence prise au sol). En généralisant la définition de la capacité d'un condensateur plan $C = \frac{Q}{U}$ où Q est la charge portée par son armature positive et U la différence de potentiel entre les armatures, donnez une expression approchée de la capacité C ainsi que celle de l'énergie électrostatique W_{elec} du système Terre-électrosphère. Déterminez W_{elec} numériquement. Quelle est la valeur du champ $E(R)$ au niveau du sol ? On prendra $R = 6000$ km comme valeur du rayon terrestre.



6. Durant un orage, les flux d'air ascendants et descendants au sein des nuages (principalement les cumulonimbus s'élevant sur plusieurs kilomètres et dont le haut est de température bien plus basse que la base) provoquent des collisions entre particules de glace responsables d'une séparation de charge : la base du nuage se charge positivement alors que son centre se charge négativement, son sommet se charge, quant à lui, positivement. Il en résulte l'apparition d'une différence de potentiel U_{bs} entre la base du nuage et le sol.

On considère que la base du nuage a une surface S de l'ordre de 10^6 m^2 et qu'elle est située à une altitude de 1 km par rapport au sol.

Par une modélisation adaptée du système Terre-nuage dont on discutera la pertinence et les limites, et sachant que le claquage de l'atmosphère se produit pour un champ $E_c \simeq 300 \text{ kV.m}^{-1}$, donner l'ordre de grandeur de la valeur limite de $U_{bs,lim}$ tel qu'un éclair se produit. Quel est alors l'ordre de grandeur de la charge Q_b portée par la base du nuage ?

3.3 Lien entre champ électrostatique et gravitationnel

3.3.1 Résultats de l'électrostatique appliqués au champ gravitationnel

3.3.2 Champ de gravitation de la Terre

La Terre est assimilée à une sphère de rayon $R = 6,37.10^3 \text{ km}$ et de masse $m = 5,97.10^{24} \text{ kg}$ répartie uniformément. On donne $G = 6,67.10^{-11} \text{ kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$ (la constante de gravitation).

1. Calculer en utilisant l'analogie du théorème de Gauss, le champ de gravitation à l'extérieur de la Terre.
2. Vérifier que l'on obtient le même résultat en considérant que toute la masse de la Terre est concentrée en son centre.
3. Faire l'application numérique pour le champ de gravitation à la surface de la Terre et comparer avec l'accélération de la pesanteur.

3.3.3 Discontinuité de Bullard

On considère un modèle de la Terre à symétrie sphérique de rayon R : on observe que le champ de gravitation $\vec{g}(r)$ varie à l'intérieur de la manière suivante :

$$\vec{g}(r) = -\alpha r \vec{e}_r \text{ pour } 0 < r < \frac{R}{2}$$

$$\vec{g}(r) = -g_0 \vec{e}_r \text{ pour } \frac{R}{2} < r < R$$

On note M la masse totale de la Terre, et G la constante de gravitation universelle. On pose également $\mu_{<}(r)$ la masse volumique dans la zone $r < \frac{R}{2}$ et $\mu_{>}(r)$ celle dans la zone $r > \frac{R}{2}$.

1. Utiliser l'analogie du théorème de Gauss pour le champ gravitationnel dans la zone $r < \frac{R}{2}$ pour déterminer $\mu_{<}$. On appliquera ce théorème à deux sphères de rayons r et $r + dr$.
2. Faire de même pour trouver $\mu_{>}$.
3. Déterminer α .

3.3.4 Analogie gravitationnelle

On représente la distribution de masse à l'intérieur de la Terre par une masse volumique variant en fonction de la distance r au centre de la Terre (de rayon R_T) selon la loi :

$$\mu(r) = \mu_0 \left(1 - \alpha \frac{r^2}{R_T^2} \right)$$

1. Déterminer l'expression du champ gravitationnel $\vec{G}(\vec{r})$ en un point interne de la Terre situé en $\vec{r}$.