

TD: Électrostatique

1. Distribution discrètes de charges

1.1. Calcul de flux:

1. Soit S le cube dont un côté est la carré en question et englobant la charge



S surface fermée
donc d'après le th. de Gauss $\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

$$\text{donc } \oint_{\text{sur } S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

or $Q_{int} = q$ et si on numérote les faces de 1 à 6

$$\iint_{\text{sur } 1} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{sur } 2} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{sur } 3} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{sur } 4} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{sur } 5} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{sur } 6} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S}$$

$$+ \iint_{\text{sur } 6} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

or par symétrie le flux à travers chaque côté est identique donc

$$6 \times \iint_{\text{sur } 1} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{donc } \boxed{\iint_{\text{sur } 1} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{q}{6\epsilon_0}}$$

1.2. Etude de distributions de charges ponctuelles

1. ① 3 plans de symétrie donc $\vec{E}(0) = \vec{0}$

$$V = 4 \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\sqrt{2}q}{\pi\epsilon_0 a}$$

② 3 plans de symétrie donc $\vec{E}(0) = \vec{0}$

$$V = \frac{-\sqrt{2}q}{\pi\epsilon_0 a}$$

③ 3 plans de symétrie donc $\vec{E}(0) = \vec{0}$

$$V = (2-2) \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)} \Rightarrow V = 0$$

④ 2 plans de symétrie passant par O donc $\vec{E}(0) = E(0) \vec{e}_y$

$$E(0) = \vec{E}(0) \cdot \vec{e}_y = \left(\sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_i \right) \cdot \vec{e}_y$$

$$\text{donc } E(0) = \frac{\sqrt{2}q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 1 \times \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\text{donc } E(0) = -\frac{\sqrt{2}q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}q}{\pi\epsilon_0 a^2}$$

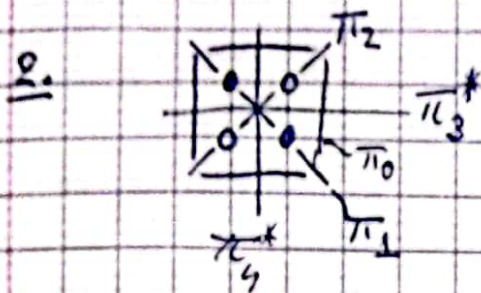
$$\text{donc } \vec{E}(0) = \frac{-\sqrt{2}q}{\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_y$$

⑤ 2 plans de symétrie donc $\vec{E}(0) = \vec{0}$

$$\text{donc } \vec{E}(0) = \frac{-q}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2} (-\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

$$\text{et } V(0) = (3-1) \frac{q}{4\pi\epsilon_0(\frac{a}{\sqrt{2}})}$$

$$\text{donc } V(0) = \frac{q}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a}$$



Plans de symétrie :

$$\pi_0(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$$

$$\pi_2(0, \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}}, \vec{e}_z)$$

$$\pi_4(0, \frac{\vec{e}_x - \vec{e}_y}{\sqrt{2}}, \vec{e}_z)$$

Plans d'anti-symétrie :

$$\pi_3^*(0, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$$

$$\pi_4^*(0, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

3.



Une charge q_i en P_i a une énergie potentielle

$$E_p = q_i V(P_i) \text{ avec } V \text{ le potentiel}$$

créé par les autres charges

$$\text{donc } E_p = q_i \times \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 P_i P_j}$$

Si on fait la somme pour toutes les charges individuellement, on compte deux fois le terme

$$\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 P_i P_j}$$

$$\frac{q_j q_i}{4\pi\epsilon_0 P_j P_i}$$

alors

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 P_i P_j}$$

③ toutes les charges sont identiques donc $E_{tot} = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(2 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}a} \right)$

$$\text{donc } E_{tot} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a}$$

② idem avec des charges négatives $\boxed{\phi_{\text{tot}}^{\infty} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{(-q)^2}{\pi \epsilon_0 a} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{q^2}{\pi \epsilon_0 a}}$

③ $\phi_{\text{tot}}^{\infty} = \frac{1}{2} \times 2 \times \left(2 \times \frac{(-q^2)}{4\pi \epsilon_0 a} + \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{2} a} + 2 \times \frac{(-q^2)}{4\pi \epsilon_0 a} + \frac{(-1)^2}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{2} a} \right)$

$\boxed{\phi_{\text{tot}}^{\infty} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{q^2}{\pi \epsilon_0 a}}$

④ $\phi_{\text{tot}}^{\infty} = \frac{1}{2} \times \underbrace{1}_{\substack{\text{point } q/\epsilon_0 \\ \& \text{ charges}}} \times \left(\underbrace{\frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 a}}_{\substack{\text{un voisin} \\ \text{de m charges}}} + \underbrace{\frac{(-q^2)}{4\pi \epsilon_0 a}}_{\substack{\text{un voisin} \\ \text{de charges} \\ \text{opposée}}} + \underbrace{\frac{(-q^2)}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{2} a}}_{\substack{\text{en diagonale} \\ \text{une charge} \\ \text{opposée}}} \right)$

donc $\boxed{\phi_{\text{tot}}^{\infty} = \frac{-q^2}{2\sqrt{2} \pi \epsilon_0 a}}$

⑤ $\phi_{\text{tot}}^{\infty} = \frac{1}{2} \times \left[2 \times \left(\frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 a} + \frac{(-q^2)}{4\pi \epsilon_0 a} + \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{2} a} \right) + \left(2 \times \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 a} + \frac{(-q^2)}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{2} a} \right) + \left(2 \times \frac{(-q^2)}{4\pi \epsilon_0 a} + \frac{(-q^2)}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{2} a} \right) \right]$

$\boxed{\phi_{\text{tot}}^{\infty} = 0}$

$\phi_0 V(x, y) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a}{2})^2}} + \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{a}{2})^2}} + \frac{(-q)}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a}{2})^2}} + \frac{(-q)}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{a}{2})^2}}$

donc $V(x, y) = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 a} \times \left[\left(\left(1 + \frac{2x}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{2y}{a}\right)^2 \right)^{-1/2} + \left(\left(1 - \frac{2x}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{2y}{a}\right)^2 \right)^{-1/2} - \left(\left(1 - \frac{2x}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{2y}{a}\right)^2 \right)^{-1/2} - \left(\left(1 + \frac{2x}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{2y}{a}\right)^2 \right)^{-1/2} \right]$

proche du centre $\Rightarrow \frac{2x}{a}$ et $\frac{2y}{a} \ll 1$ donc on peut faire un DL

car comme $V(0) = 0 \Rightarrow$ l'ordre d'ordre 0 nul

car comme $\vec{E}(0) = \vec{0} \Rightarrow$ l'ordre d'ordre 1 nul

donc on fait un DL à l'ordre 2 en $\frac{2x}{a}$ et $\frac{2y}{a}$

$$n (1+u)^{\alpha} = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + o(u^2)$$

$u \ll 1$

$$\text{donc } V(x,y) \simeq \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \left[\left(2 + \frac{4x}{a} + \left(\frac{2x}{a}\right)^2 - \frac{4y}{a} + \left(\frac{2y}{a}\right)^2 \right)^{1/2} + \left(2 - \frac{4x}{a} + \left(\frac{2x}{a}\right)^2 + \frac{4y}{a} + \left(\frac{2y}{a}\right)^2 \right)^{-1/2} - \left(2 - \frac{4x}{a} + \left(\frac{2x}{a}\right)^2 - \frac{4y}{a} + \left(\frac{2y}{a}\right)^2 \right)^{1/2} - \left(2 + \frac{4x}{a} + \left(\frac{2x}{a}\right)^2 + \frac{4y}{a} + \left(\frac{2y}{a}\right)^2 \right)^{-1/2} \right]$$

$$\text{donc } V(x,y) \simeq \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left[0 + 0 \right]$$

$$\left[\frac{-\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2} - 1)}{2} = \frac{3}{8} \right]$$

$$+ \frac{3}{8} \left(\frac{2x}{a} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{2y}{a} \right)^2 + \frac{3}{8} \times 2 \times \left(\frac{2x}{a} \right) \times \left(\frac{-2y}{a} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{2x}{a} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{2y}{a} \right)^2$$

$$+ \frac{3}{8} \left(\frac{2x}{a} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{2y}{a} \right)^2 + \frac{3}{8} \times 2 \times \left(\frac{-2x}{a} \right) \times \left(\frac{2y}{a} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{2x}{a} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{2y}{a} \right)^2$$

$$- \frac{3}{8} \left(\frac{2x}{a} \right)^2 - \frac{3}{8} \left(\frac{2y}{a} \right)^2 - \frac{3}{8} \times 2 \times \left(\frac{-2x}{a} \right) \times \left(\frac{-2y}{a} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{2x}{a} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{2y}{a} \right)^2$$

$$- \frac{3}{8} \left(\frac{2x}{a} \right)^2 - \frac{3}{8} \left(\frac{2y}{a} \right)^2 - \frac{3}{8} \times 2 \times \left(\frac{2x}{a} \right) \times \left(\frac{2y}{a} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{2x}{a} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{2y}{a} \right)^2]$$

$$\text{donc } V(x,y) \approx -12 \frac{xy}{a^2} \left(+o\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + o\left(\frac{y^2}{a^2}\right) + o\left(\frac{xy}{a^2}\right) \right)$$

(potentiel au selle de cheval)



1.3. Le dipôle électrostatique

$$\underline{1.} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{AM}}{AM^3}} \quad \text{et} \quad \boxed{V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 AM}}$$

$$\underline{2. (a)} \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{AM}}{AM^3} + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{BM}}{BM^3}$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \left(\frac{\vec{AM}}{AM^3} - \frac{\vec{BM}}{BM^3} \right)}$$

$$\text{et } \boxed{V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right)}$$

2. (b) on introduit la longueur $AM = \sqrt{AM^2} = \sqrt{\vec{AM} \cdot \vec{AM}}$ et $\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM}$

$$\text{donc } AM = \sqrt{\vec{AO} \cdot \vec{AO} + 2\vec{AO} \cdot \vec{OM} + \vec{OM} \cdot \vec{OM}}$$

$$\text{donc } AM = \sqrt{d^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OM} + r^2}$$

or $r \gg d$ donc $\|\vec{OM}\| \gg \|\vec{AO}\|$

$$\text{donc } AM \approx r \times \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{2\vec{AO} \cdot \vec{OM}}{r^2} \right)$$

$$\text{donc } \frac{1}{AM} \approx \frac{1}{r} \times \left(1 - \frac{\vec{AO} \cdot \vec{OM}}{r^2} \right)$$

de même

$$\frac{1}{BM} \approx \frac{1}{r} \times \left(1 - \frac{\vec{BO} \cdot \vec{OM}}{r^2} \right)$$

$$\text{donc } V \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{n} \times \left(-\frac{\vec{AO} \cdot \vec{ON}}{n^2} + \frac{\vec{BO} \cdot \vec{ON}}{n^2} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{(\vec{BO} - \vec{AO}) \cdot \vec{ON}}{n^3}$$

$$\text{donc } V \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{BA} \cdot \vec{ON}}{n^3}$$

9. $\vec{E} = -\text{grad } V$ en coordonnées polaires $\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$

$$\text{d'où } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{(2d\vec{e}_z) \cdot (n\vec{e}_r)}{n^3} = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos\theta}{n^2}$$

$$\text{donc } \vec{E} = -\frac{qd}{2\pi\epsilon_0} \times \cos\theta \times \left(-\frac{2}{n^3} \right) \vec{e}_r + \frac{-1}{n} \times \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 n^2} \times (-\sin\theta) \vec{e}_\theta$$

$$\text{donc } \vec{E} = \frac{2qd}{4\pi\epsilon_0 n^3} (2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta)$$

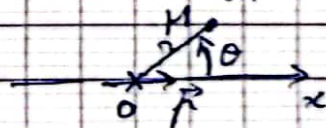
1.4. Lignes de champ et équipotentielles = le dièdre

1. Pour une ligne de champ $d\vec{l} \parallel \vec{E}$

$$\text{donc } d\vec{l} \parallel \left(3\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} - \vec{r} \right)$$

$$\text{on demande une équation donc } d\vec{l} \wedge \left(3\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} - \vec{r} \right) = \vec{0}$$

soit un système de coordonnées polaires



$$d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z \quad \text{car } \vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \text{ et } \vec{ON} = r \vec{e}_r$$

$$d\vec{l} \wedge \left(3\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} - \vec{r} \right) = \begin{vmatrix} dr & r d\theta & dz \\ 3\rho \cos\theta & 3\rho \sin\theta & 0 \\ 3\rho \cos\theta & 3\rho \sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta \rho dz \\ 2\rho \rho d\theta \\ \sin\theta \rho dr - r \times 2\rho \rho d\theta \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} -\sin\theta \times r \, d\theta = 0 \\ 2\cos\theta \times r \, d\theta = 0 \\ \sin\theta \, r \, dr - 2r\cos\theta \, r \, d\theta = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \cancel{\frac{dr}{r} = 0} \quad \sin\theta \, dr - 2r\cos\theta \, d\theta = 0$$

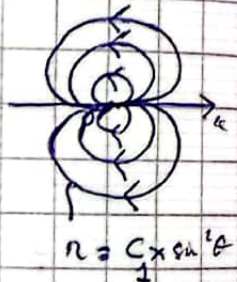
$$\text{donc } \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sin\theta} = 2 \times \frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$\text{donc } d(\ln(r)) = 2 \times d(\ln(\sin\theta))$$

$$\text{donc } \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = 2 \ln\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0}\right)$$

$$\text{donc } \boxed{r = C \times \sin^2\theta} \text{ avec } C \text{ une constante}$$

Equation des lignes de champs



2. avec le même système de coordonnées

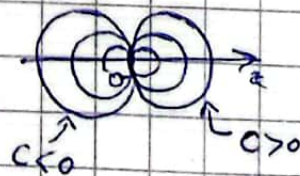
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{r \times r \times \cos\theta}{r^3} \quad \text{donc } \frac{\cos\theta}{r^2} = \text{cte}$$

$$\text{donc } r = C \times \cos\theta$$

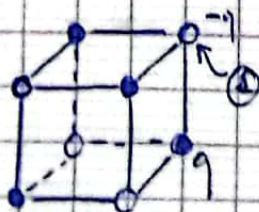
$$\boxed{r^2 = C \times \cos\theta}$$

Equation équirépotentielle

avec C une cte
 $C > 0$ ou $C < 0$
 selon que
 $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$
 ou $\theta \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$



1.5. Calcul d'une force électrostatique



1. ① prenons le charge ①

$$\vec{F} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_x + \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_y + \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_z \quad (\text{voisins})$$

(2nd voisins)

$$+ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \right) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{2}} \right) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\vec{e}_z + \vec{e}_x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$- \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{3}} \right) \quad (\text{opposés du cube})$$

$$\text{donc } \vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) \vec{e}_x + \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) \vec{e}_y + \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) \vec{e}_z \right]$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{F} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)}$$

Le résultat est identique pour toute permutation $x \rightarrow y \rightarrow z$ ou $q \rightarrow -q$
donc pour toutes les charges elles sont attirées vers le centre du cube.

1.6. N charges ponctuelles



π_0 et π_1 sont des plans de symétrie
et $O \in \pi_0$ et $O \in \pi_1$

$$\text{donc } \vec{E}(O) = E(O) \vec{e}_x$$

$$\text{donc } E(O) = \sum_{i=1}^N \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{A}_i \cdot \vec{O}}{A_i O^3} \cdot \vec{e}_x$$

$$\text{a } A_i O = R \quad \vec{A}_i \cdot \vec{O} = -R \times \cos \left(\pi - \frac{\alpha}{2} + \frac{(i-1)\alpha}{N-1} \right)$$

$$\text{donc } E(O) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{j=0}^{N-1} \cos \left(\pi - \frac{\alpha}{2} + \frac{j\alpha}{N-1} \right)$$

$$\text{donc } E(0) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \exp \left(i \left(\pi - \frac{\alpha}{2} + \frac{j\alpha}{N-1} \right) \right) \right)$$

$$\text{donc } E(0) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \operatorname{Re} \left(e^{i(\pi - \frac{\alpha}{2})} \times \frac{1 - e^{iN\alpha/(N-1)}}{1 - e^{i\alpha/(N-1)}} \right)$$

$$\text{donc } E(0) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \operatorname{Re} \left(e^{i(\pi - \frac{\alpha}{2})} \times e^{i \frac{N\alpha}{2(N-1)} - i \frac{\alpha}{2(N-1)}} \times \frac{\sin(N\alpha/(2(N-1)))}{\sin(\alpha/(2(N-1)))} \right)$$

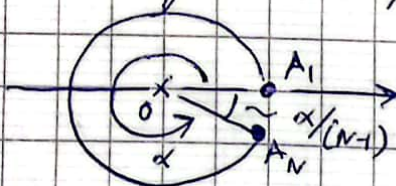
$$\text{donc } E(0) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \cos \left(\pi - \frac{\alpha}{2} + \frac{N\alpha}{2(N-1)} - \frac{\alpha}{2(N-1)} \right) \times \frac{\sin \left(\frac{N\alpha}{2(N-1)} \right)}{\sin \left(\frac{\alpha}{2(N-1)} \right)}$$

$$\text{donc } E(0) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \cos \left(\pi - \frac{(N-1-N+1)\alpha}{2(N-1)} \right) \times \frac{\sin \left(\frac{N\alpha}{2(N-1)} \right)}{\sin \left(\frac{\alpha}{2(N-1)} \right)}$$

$= -1$

$$\text{donc } \vec{E}(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \frac{\sin \left(\frac{N\alpha}{2(N-1)} \right)}{\sin \left(\frac{\alpha}{2(N-1)} \right)} \vec{e}_x$$

2. Si les charges sont uniformément réparties



$$\text{donc } \alpha = 2\pi - \frac{\alpha}{N-1}$$

$$\text{donc } \frac{(N-1)}{N-1} \alpha + \frac{\alpha}{N-1} = 2\pi$$

$$\Rightarrow \frac{N\alpha}{N-1} = 2\pi$$

$$\text{donc } \frac{\alpha}{N-1} = \frac{2\pi}{N}$$

$$\text{donc } \sin \left(\frac{N\alpha}{2(N-1)} \right) = \sin \left(\frac{2\pi}{2} \right) = 0$$

$$\text{donc } \sin \left(\frac{\alpha}{2(N-1)} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{N} \right) \neq 0 \text{ si } N \geq 2$$

donc $\vec{E}(0) = \vec{0}$ cohérent avec la symétrie.

1.7. Potentiel créé par une chaîne infinie

1. A priori les ions sont attirés par leur voisin donc l'énergie doit diminuer si $a \rightarrow 0$.

2. $V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |x|}$ on suppose un espace 1D avec seulement la coordonnée x .

3. $E_{p,a} = -q \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$, $E_{p,2a} = q \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \times 2a}$

4. de manière générale avec $k \in \mathbb{Z}^*$ ($k \neq 0$)

$$E_{p,k2a} = (-1)^k q \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |k|a} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \times \frac{(-1)^k}{|k|}$$

$$\text{et } W = \sum_{k \neq 0} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \times \frac{(-1)^k}{|k|} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \times 2 \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

donc $W = \frac{-\ln(2) q^2}{2\pi\epsilon_0 a}$

1.8. Un exemple de quadrupole

1.



$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \left(\frac{1}{A_1P} + \frac{1}{A_2P} - \frac{2}{OP} \right)$$

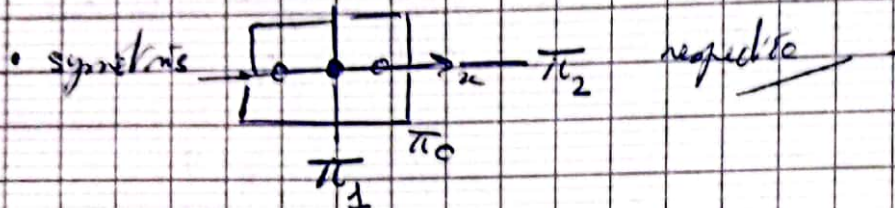
$$\text{on } \frac{1}{A_1P} = (n^2 + 2\cos\theta nd + d^2)^{-1/2} \simeq \frac{1}{n} \left(1 + \cos\theta \frac{d}{n} - \frac{d^2}{2n^2} + \frac{3}{8} 4\cos^2\theta \frac{d^2}{n^2} \right)$$

$$\frac{1}{A_2P} = (n^2 + 2\cos\theta nd + d^2)^{-1/2} \simeq \frac{1}{n} \left(1 - \cos\theta \frac{d}{n} - \frac{d^2}{2n^2} + \frac{3}{8} 4\cos^2\theta \frac{d^2}{n^2} \right)$$

$$\text{donc } V \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0 n} \times \frac{d^2}{n^2} \times (3\cos^2\theta - 1)$$

$$V \sim \frac{q d^2}{4\pi\epsilon_0 n^3} (3\cos^2\theta - 1)$$

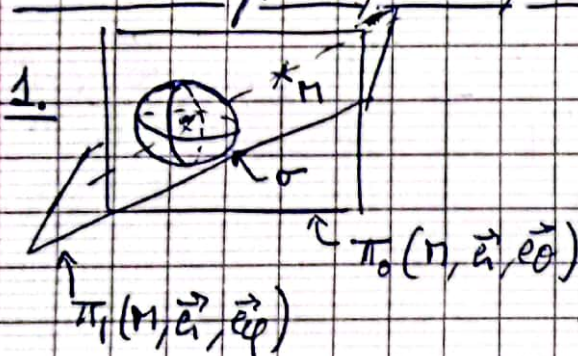
2. Dérivance en $\frac{1}{n^3}$ plus rapide qu'une charge ou un dipôle



2. Distribution continues de charges

2.1. Géométrie sphérique

2.1.1. Champ créé par une sphère chargée en surface



π_0 et π_1 plans de symétrie de la distribution de charge et $\pi \in \pi_0$ et $\pi \in \pi_1$

$$\text{donc } \boxed{\vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r}$$

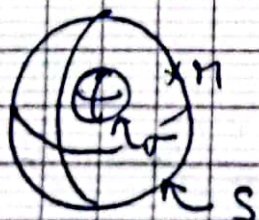
Invariance par rotation autour de $(O\vec{e}_r)$ d'angle ϕ

$$\text{donc } \vec{E}(r) = E(r, \theta) \vec{e}_r$$

Invariance par rotation autour de $(O\vec{e}_\theta)$ d'angle θ

$$\text{donc } \boxed{\vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r}$$

On choisit comme surface de Gauss une sphère de centre O passant par P



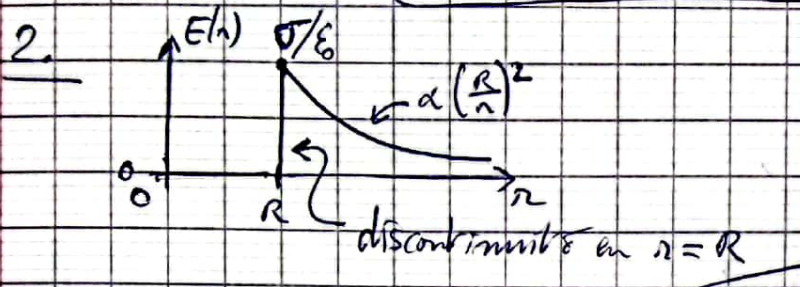
$$\phi(\vec{e}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\text{donc } \oint_{S \in S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\text{donc } 4\pi n^2 \times E(n) = \frac{4\pi R^2 \times \sigma}{\epsilon_0} \text{ pour } n > R$$

$$\text{et } 4\pi n^2 \times E(n) = 0 \text{ pour } n < R$$

$$\text{donc } \begin{cases} n < R, E(n) = 0 & \leftarrow \text{intérieur} \\ n > R, E(n) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \times \left(\frac{R}{n}\right)^2 & \leftarrow \text{extérieur} \end{cases}$$



Si on applique la relation de passage

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \vec{E}(R^+) - \vec{E}(R^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_r - \vec{0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_r$$

et $\vec{n}_{12} = \vec{e}_r$ donc elle est bien vérifiée.

3. $\vec{E} = -\text{grad}(V) \Rightarrow E(n) = -\frac{\partial V}{\partial n}$

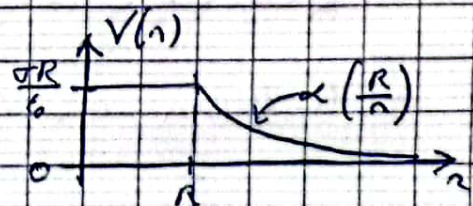
$$\text{donc } \begin{cases} n < R, \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \\ n > R, \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{n}\right)^2 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} n < R, V(n) = V(0) \\ n > R, V(n) = V(R) + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{n} - R\right) = V(0) + \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{n} - 1\right) \end{cases}$$

V continue car dérivable
 $\downarrow$

$$\text{or } V(n) \rightarrow 0 \text{ donc } V(0) - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = 0$$

$$\text{donc } \begin{cases} n < R, V(n) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \\ n > R, V(n) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 n} \end{cases}$$



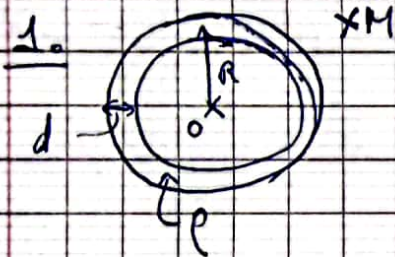
$$V(R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \vec{E}(R^+) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{a}_r$$

$$\text{donc} \quad \boxed{\vec{E}(R^+) = \frac{V(R)}{R} \vec{n}}$$

Plus le rayon de courbure est faible, plus $R \rightarrow 0$, plus $\|\vec{E}(R^+)\| \rightarrow +\infty$

2.1.2. Calculs de champ électrique

*



- coordonnées cylindriques
- $(r, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$ et $(r, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ plans de symétrie
donc $\vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$

- invariance par rotation d'angle θ et ϕ
donc $\vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$

- th. de Gauss sur une sphère passant par Π de centre O

$$\oint (\vec{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\text{donc} \quad \oint_{\Pi \in S} \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

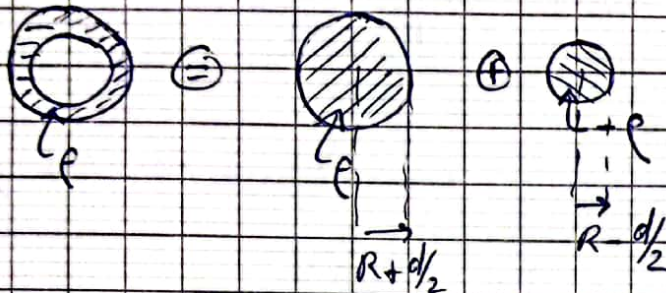
$$\text{si } r < R - \frac{d}{2}, \text{ alors } Q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow E(r) = 0$$

$$\text{si } R - \frac{d}{2} < r < R + \frac{d}{2}, \text{ alors } 4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \times \frac{4}{3}\pi \left(r^3 - \left(R - \frac{d}{2} \right)^3 \right)$$

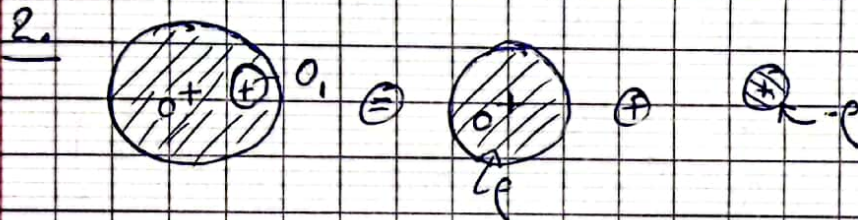
$$\text{si } R + \frac{d}{2} < r, \text{ alors } 4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \times \frac{4}{3}\pi \left(\left(R + \frac{d}{2} \right)^3 - \left(R - \frac{d}{2} \right)^3 \right)$$

$$\begin{cases} r < R - \frac{d}{2}, \vec{E} = \vec{0} \\ R - \frac{d}{2} < r < R + \frac{d}{2}, \vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{(R - \frac{d}{2})^3}{r^2} \right) \vec{e}_r \\ R + \frac{d}{2} < r, \vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{(R + \frac{d}{2})^3}{r^2} - \frac{(R - \frac{d}{2})^3}{r^2} \right) \vec{e}_r \end{cases}$$

Autre méthode par superposition de deux boules uniformément chargées



dont on a donné les expressions des champs en cours

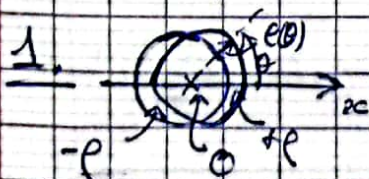


donc $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_\rho + \vec{E}_{-\rho}$ or à l'extérieur $\vec{E}_\rho = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O}\vec{H}$
 et $\vec{E}_{-\rho} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O}\vec{H}$

donc $\vec{E}_{tot} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{O}\vec{H} - \vec{O}\vec{H})$

donc $\boxed{\vec{E}_{centre} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O}\vec{O}_1}$

2.1.3. Superposition de deux distributions sphériques



on pose $e(\theta)$ l'épaisseur de la couche sphérique
 $\sigma = \rho \times e(\theta)$

et $e(\theta) = O_1\vec{n}_1 - O_2\vec{n}_2$



avec $O\vec{n}_1 = \sqrt{O\vec{n}_1 \cdot O\vec{n}_1} = \left(\underbrace{O\vec{n}_1^2}_{= \frac{R^2}{4}} + 2 \underbrace{O\vec{n}_1 \cdot O\vec{n}_2}_{= \frac{R}{2}} \cos \theta + \underbrace{O\vec{n}_2^2}_{= R^2} \right)^{1/2} \approx R \times \left(1 + \frac{R}{2R^2} \right)$

$$\text{de même } OH_2 = \sqrt{\vec{OH}_1 \cdot \vec{OH}_2} = (a^2 - 2aR \cos \theta + R^2)^{1/2}$$

$$\approx R \left(1 - \frac{aR}{2R^2} \cos \theta \right)$$

$$\text{donc } r(\theta) \approx \frac{2aR^2}{2R^2} \cos \theta = a \cos \theta$$

$$\text{donc } \boxed{\sigma = \rho a \cos \theta} \quad \text{et } \boxed{\sigma_0 = \rho a}$$

2. Par principe de superposition à l'extérieur des deux sphères

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R^3 \frac{\vec{OH}}{OH^3} - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{O_2 n}}{O_2 n^3}$$

$$\text{donc } \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{\vec{O_1 O}}{OH^3} - \frac{\vec{O_2 O}}{O_2 n^3} + \left(\frac{1}{OH^3} - \frac{1}{O_2 n^3} \right) \vec{OH} \right)$$

$$\text{or } \vec{O_1 O} = -\vec{O_2 O} = -\frac{\vec{O_2 O_1}}{2} \quad \text{donc on peut écrire non nul}$$

$$\frac{\vec{O_1 O}}{OH^3} - \frac{\vec{O_2 O}}{O_2 n^3} = \left(\frac{1}{OH^3} + \frac{1}{O_2 n^3} \right) \times \left(-\frac{\vec{O_2 O_1}}{2} \right)$$

$$\approx -\frac{\vec{O_2 O_1}}{OH^3}$$

$$\text{et } \frac{1}{OH^3} \approx \frac{1}{OH^3} \times \left(1 + \frac{3}{2} \frac{O_2 O_1 \cdot OH}{OH^2} \cos \theta \right) \approx \frac{1}{OH^3} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\vec{O_2 O_1} \cdot \vec{OH}}{OH^2} \right)$$

$$\frac{1}{O_2 n^3} \approx \frac{1}{O_2 n^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\vec{O_2 O_1} \cdot \vec{OH}}{O_2 n^2} \right)$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \times \frac{1}{OH^3} \left(3 \frac{(\vec{O_2 O_1} \cdot \vec{OH})}{OH^2} \vec{OH} - \vec{O_2 O_1} \right)}$$

2.2. Géométrie cylindrique

2.2.1. Capacité linéique d'un câble coaxial

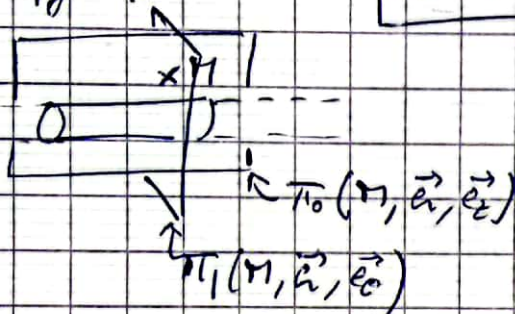
1. • effets de bords négligeable si $h \gg R_2 \Rightarrow$ câble infiniment long

• la charge totale portée par la gaine est $q_g = 2\pi R_2 \times h \times \sigma_2$

la charge totale portée par l'âme est $q_a = 2\pi R_1 \times h \times \sigma_1$

$$\text{or } q_g + q_a = 0 \text{ donc } \boxed{\sigma_2 R_2 + \sigma_1 R_1 = 0}$$

2.(a)



π_0 et π_1 sont des plans de symétrie
si $M \in \pi_0$ et $M \in \pi_1$

$$\text{donc } \vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_r$$

Invariance par rotation selon $\vec{e}_z$

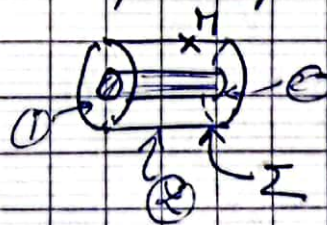
$$\text{donc } \vec{E}(M) = E(r, \theta) \vec{e}_r$$

invariance par rotation autour de (Oz) d'angle θ

$$\text{donc } \boxed{\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r}$$

$$\text{et } \boxed{V(M) = V(r)}$$

2.(b) Σ cylindre de hauteur h passant par M de même axe que le câble coaxial



$$\text{th. de Gauss } \oint = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\text{donc } \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} &= \int_{\text{face 1}} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} + \int_{\text{face 2}} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} + \int_{\text{face 3}} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{\sigma_1 \times 2\pi R_1 h}{\epsilon_0} \\ &= 0 \quad (\text{car } \vec{E} \perp d\vec{\Sigma}) \quad + 0 \quad (\text{car } \vec{E} \perp d\vec{\Sigma}) \quad + \int_{\text{face 3}} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \\ &\quad \text{car } \vec{E} \parallel d\vec{\Sigma} \Rightarrow 2\pi h E(r) \end{aligned}$$

donc $2\pi n K E(h) = \frac{2\pi R_1 \sigma_1 h}{\epsilon_0}$

donc $\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \times \frac{R_1}{r} \vec{e}_r}$

$$U = - \int_{\vec{r} \rightarrow \vec{a}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \times \frac{R_1}{r} dr = - \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} R_1 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

donc $\boxed{U = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

2(c) $Q = 2\pi R_1 \times h \times \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 R_1 = \frac{Q}{2\pi h}$

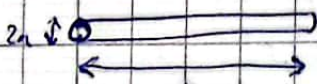
donc $U = \frac{Q}{2\pi h \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

donc $C = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \times h$

donc $\boxed{C_p = \frac{C}{h} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$

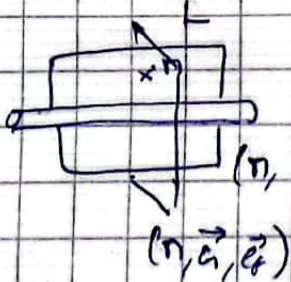
2.(d) Application numérique $\boxed{C_p = 6,0 \times 10^{-11} \text{ F.m}^{-1}}$

2.2.2. Ligne bifilaire

1. 

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{tot}} &= \lambda \times L \\ &= 2\pi a \times L \times \sigma \end{aligned} \right\} \text{donc } \boxed{\sigma = \frac{\lambda}{2\pi a}}$$

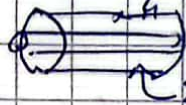
2.



$(r, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$
 $(r, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ } plan de symétrie de r et axes plans
 donc $\vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$

invariante par translation selon $\vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}(r) = E(r, \theta) \vec{e}_r$
 invariante par rotation autour de $(Oz) \Rightarrow \vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$

Surface de Gauss $\Rightarrow$ cylindre d'axe (Oz) fermé par M



$$\phi(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_{M \in S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\lambda \times L}{\epsilon_0} \quad \text{car } \vec{E} \perp d\vec{S} \text{ sur les surfaces latérales et } \vec{E} \parallel d\vec{S} \text{ sur les bases}$$

$$\Rightarrow \int_{M \in S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\lambda \times L}{\epsilon_0} \quad \text{car } \vec{E} \parallel d\vec{S} \text{ et } E(r) \text{ unif. sur } S$$

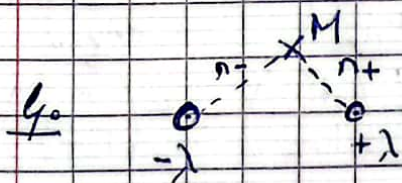
$$\text{car } E(r) \times 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$\text{car } E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \quad \text{car } \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r}$$

3. $\vec{E} = -\text{grad}(V)$ car $E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$

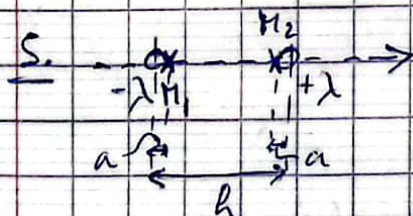
$$\text{car } \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

$$\text{car } \boxed{V(r) = V(a) - \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{a}\right)}$$



$$V_{\text{tot}} = V_+ + V_- = cte + \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \left(\ln\left(\frac{r_-}{a}\right) - \ln\left(\frac{r_+}{a}\right) \right)$$

$$V = cte + \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)$$



$$U = V(M_2) - V(M_1)$$

$$U = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{h-a}{a}\right) - \ln\left(\frac{a}{h-a}\right) \right]$$

$$\text{car } U = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{h}{a} - 1\right) \quad \text{car } h \gg a$$

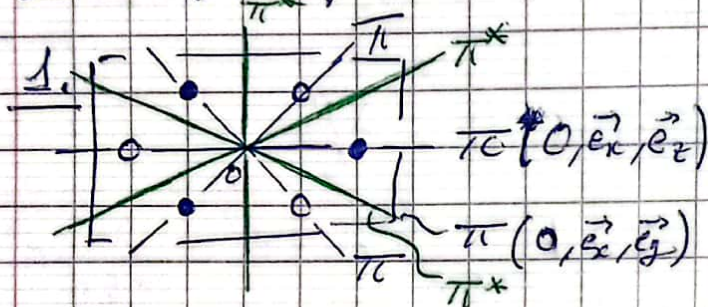
$$\text{car } \boxed{U \approx \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{h}{a}\right)}$$

6. G. $Q = \lambda \times l$ donc $U = \frac{Q}{l \times \pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

donc $C_l = \frac{C}{l} = \frac{Q}{lU}$

donc $C_l = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

2.2.3. Prisme hexagonal



plan de symétrie

$\Rightarrow$ plan de la feuille

$\oplus$ plan contenant 2 fils opposés

plan d'ant-symétrie

$\Rightarrow$ plans médiateurs de la figure

invariance par translation selon $\vec{e}_z$.

2. Pour un fil infini de charge linéique λ de rayon R le potentiel à une distance r du fil est

$$V = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) + \text{cte}$$

3. ici $V(P) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{R}{PA_1}\right) + \ln\left(\frac{R}{PA_3}\right) + \ln\left(\frac{R}{PA_5}\right) - \ln\left(\frac{R}{PA_2}\right) - \ln\left(\frac{R}{PA_4}\right) - \ln\left(\frac{R}{PA_6}\right) \right]$

donc $V(P) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{PA_1} \times \frac{R}{PA_3} \times \frac{R}{PA_5} \times \frac{PA_2}{R} \times \frac{PA_4}{R} \times \frac{PA_6}{R} \right)$

donc $V(P) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{PA_2 \times PA_4 \times PA_6}{PA_1 \times PA_3 \times PA_5} \right)$

4. sous forme d'affixe $PA_j = |z_p - z_j| = |ne^{i0} - ae^{i(5-1)\frac{\pi}{5}}|$

donc $\frac{PA_2 \times PA_4 \times PA_6}{PA_1 \times PA_3 \times PA_5} = \left| \frac{(z - ae^{i\frac{\pi}{5}}) \times (z - ae^{i\frac{3\pi}{5}}) \times (z - ae^{i\frac{5\pi}{5}})}{(z - a) \times (z - ae^{i\frac{2\pi}{5}}) \times (z - ae^{i\frac{4\pi}{5}})} \right|$

$$= \left| \frac{(z+a)(z^2+a^2-2az\cos(\pi/5))}{(z-a)(z^2+a^2-2az\cos(2\pi/5))} \right|$$

$$= \left| \frac{(z+a)(z^2+a^2-az)}{(z-a)(z^2+a^2+az)} \right| = \left| \frac{z^3+az^2-az^2+a^2-a^2z}{z^3+za^2+az^2-az^2-a^3-az^2} \right|$$

$$= \left| \frac{z^3+a^3}{z^3-a^3} \right| = \left| \frac{a^3+z^3}{a^3-z^3} \right|$$

5. au voisinage de l'axe réel $n \ll a$ donc $|z| \ll a$

donc $\left| \frac{a^3+z^3}{a^3-z^3} \right| = \left| \frac{1+(z/a)^3}{1-(z/a)^3} \right| \approx \left| 1+2\left(\frac{z}{a}\right)^3 \right|$

$$\approx \sqrt{\left(1+2\left(\frac{n}{a}\right)^3 \cos(3\theta)\right)^2 + 4\left(\frac{n}{a}\right)^6 \sin^2(3\theta)}$$

$$\approx \sqrt{1+4\left(\frac{n}{a}\right)^3 \cos(3\theta) + 4\left(\frac{n}{a}\right)^6}$$

$$\approx 1+2\left(\frac{n}{a}\right)^3 \cos(3\theta)$$

donc $V(n, \theta) \approx \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \times \ln\left(1+2\left(\frac{n}{a}\right)^3 \cos(3\theta)\right)$

or $\ln(1+u) \approx u$
 $u \ll 1$

donc $V(n, \theta) \approx \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \times 2\left(\frac{n}{a}\right)^3 \cos(3\theta)$

donc $V(n, \theta) \approx \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \left(\frac{n}{a}\right)^3 \cos(3\theta)$