

Travaux Dirigés du chapitre : 5.3 Équations de Maxwell

Partie : 5. Électromagnétisme

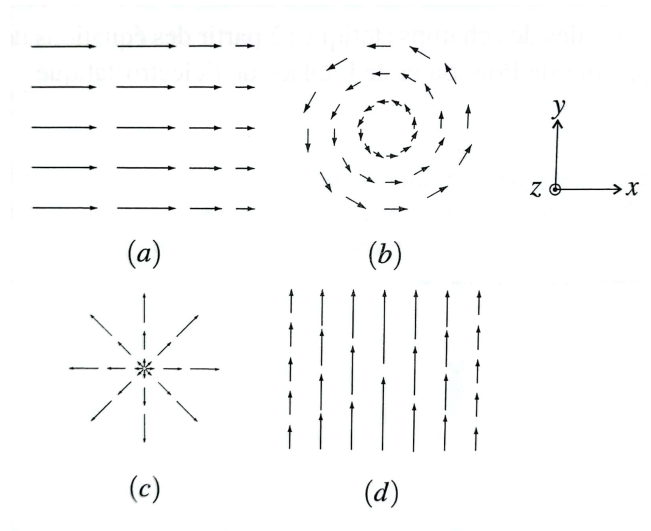
1 Bille radioactive

Une bille radioactive initialement neutre de rayon $R = 0$ émet de façon isotrope, à partir de la date $t = 0$, N particules par seconde de charge e , avec une vitesse de norme v_0 . On note $\vec{j}(r, t) = j(r, t)\vec{e}_r$ le vecteur densité de courant volumique et $\rho(r, t)$ la densité volumique de charges en un point M à la distance $r = OM$ du centre O de la bille et à la date t .

1. Justifier l'existence, à la date t , d'un rayon critique $r_c(t)$ au-delà duquel il n'y a plus de particule et l'exprimer.
2. En utilisant le principe de conservation de la charge, déterminer la charge $Q(t)$ de la bille à la date t .
3. En supposant que les particules se déplacent à une vitesse v_0 constante, reliez la coordonnée r d'une particule à la durée t depuis laquelle elle est émise, puis en déduire le nombre de particules Ndt entre les sphères r et $r + dr$ en fonction de N , dr et v_0 .
4. Exprimer alors $\rho(r, t)$ pour $r < r_c(t)$ et en déduire $j(r, t)$.
5. En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, vérifier que l'équation de conservation de la charge intégrée sur une sphère de rayon R est bien valide. On distinguera les cas $R < r_c$ et $R > r_c$.
6. Pourquoi l'hypothèse d'une vitesse constante des particules est-elle discutable ?

2 Champs statiques

Les figures ci-dessous représentent, dans un plan $z = \text{cte}$, quelques cartes de champs bidimensionnels de la forme : $\vec{a}(x, y) = a_x(x, y)\vec{e}_x + a_y(x, y)\vec{e}_y$



1. Chaque champ est de la forme $\vec{a} = a_\alpha(\beta)\vec{e}_\alpha$ où α et β sont deux coordonnées (éventuellement identiques) d'un repère de l'espace adapté.
Précisez pour chacun qui sont α et β .
2. Sur chaque carte quel est le signe de $\text{div}(\vec{a})$?
3. Sur chaque carte quel est la direction de $\vec{\text{rot}}(\vec{a})$?
4. Indiquer si chaque carte peut correspondre à un champ électrostatique ou magnétostatique.

3 Une solution aux équations de Maxwell

On suppose que le champ électromagnétique régnant dans une partie de l'espace vide de charges et de courant est donné par l'expression suivante :

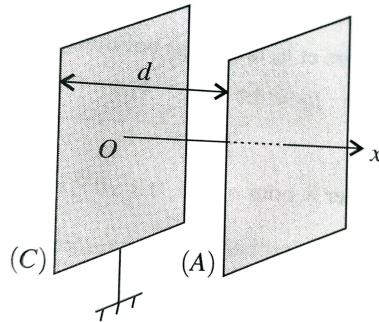
$$\vec{E}(M, t) = f(z) \exp(-\alpha t) \vec{e}_x \text{ et } \vec{B}(M, t) = g(z) \exp(-\alpha t) \vec{e}_y$$

1. Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Flux sont-elles vérifiées ?
2. Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une relation entre $g(z)$ et $\frac{df}{dz}$.
3. Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une relation entre $f(z)$ et $\frac{dg}{dz}$.
4. En déduire $f(z)$ en supposant que $f(z)$ est pair et que $\vec{E}(0, 0) = E_0 \vec{e}_z$. Donner l'expression du champ électromagnétique.

4 A l'intérieur du condensateur

4.1 Condensateur vide

On considère un condensateur plan formé de deux plaques planes parallèles (C) et (A) de surface S et distantes de d . L'ensemble est placé dans le vide. Les plaques sont maintenues en régime permanent respectivement aux potentiels $V_C = 0$ et $V_A = U$.



1. Expliquer avec quelle hypothèse on peut négliger les effets de bords du condensateur.
2. Expliquer avec quelle hypothèse nous pouvons considérer les équations de l'électrostatique. Puis déterminer l'équation de Laplace à l'intérieur du condensateur.
3. Déterminer le potentiel à l'intérieur du condensateur.

4.2 Condensateur dans un milieu chargé

Le condensateur est toujours en régime permanent, mais il est maintenant placé dans un milieu où règne une densité volumique de charge ρ uniforme.

4. Déterminer le potentiel électrostatique dans le condensateur.

4.3 Condensateur en régime transitoire

Le condensateur est à nouveau placé dans le vide, mais en régime transitoire. On suppose que le condensateur est placé dans un circuit électrique qui fait évoluer la charge de ses armatures au cours du temps. On note $Q(t)$ la charge portée par l'armature (C) et $-Q(t)$ la charge portée par l'armature (A). Et $Q(t) = -\frac{\epsilon_0 S}{d} U(t)$

5. Déterminer l'expression du champ électrostatique entre les armatures dans le cas de l'électrostatique (régime permanent $U(t) = U$). Pour quelle raison peut-on étendre ce résultat à la situation présentée ?

Dans la suite on suppose que $U(t) = U_0 (1 - e^{-t/\tau})$

6. Déterminer l'expression du vecteur densité de courant de déplacement à l'intérieur du condensateur.
7. Déterminer l'expression du champ magnétique à l'intérieur du condensateur.

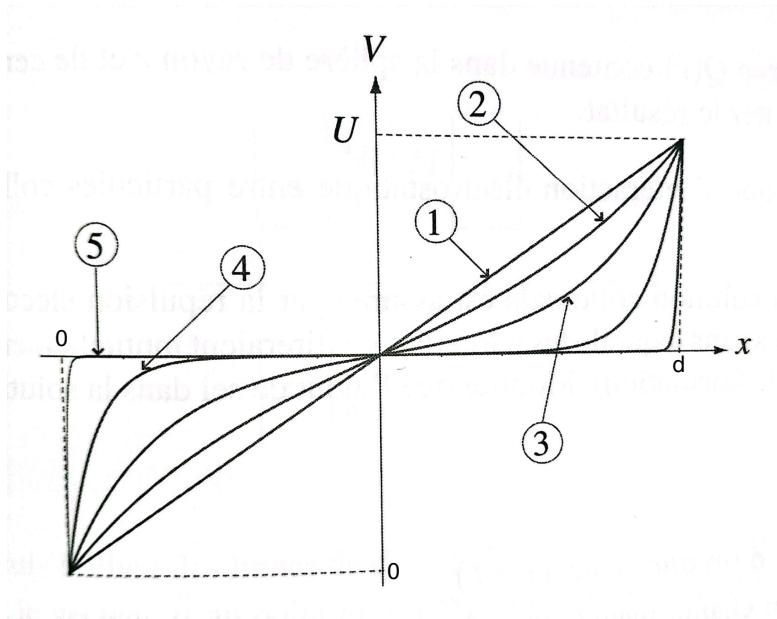
4.4 Condensateur plongé dans un électrolyte

Le condensateur est à nouveau en régime permanent. Mais on introduit entre les armatures un électrolyte constitué de cations et d'anions de charges individuelles respectives $+q$ et $-q$. En l'absence de champ (donc pour $U = 0$), les anions et les cations ont la même densité particulaire n_0 . L'ensemble est à l'équilibre thermique à la température T .

Le nombre n de particules par unité de volume qui ont l'énergie E est $n = n_0 \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$ où k_B est la constante de Boltzmann.

8. Exprimer la densité volumique de charge en fonction des données et de $V(x)$.
9. Établir l'équation différentielle vérifiée par $V(x)$.
10. Que devient-elle si on suppose $|qV| \ll k_B T$?
 Cette hypothèse étant réalisée en tout point, déterminer la fonction $V(x)$. On fera apparaître une longueur caractéristique δ que l'on exprimera en fonction de k_B , T , ϵ_0 , n_0 et q .

On donne l'allure de la courbe $V(x)$ pour différentes valeurs du paramètre $\alpha = 2\delta/d$:



Les courbes sont tracées pour :

- courbe 1 : $\alpha = 1$
- courbe 2 : $\alpha = 0,6$
- courbe 3 : $\alpha = 0,3$
- courbe 4 : $\alpha = 0,1$
- courbe 5 : $\alpha = 0,01$

11. Commenter la situation $\alpha \ll 1$ et $\alpha \simeq 1$.
12. Comment peut-on repérer la valeur de δ sur les courbes ?

4.5 Condensateur avec émission d'électron

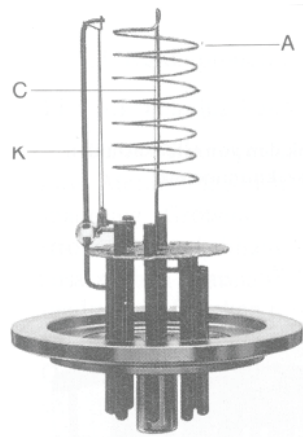
Le condensateur est à nouveau placé dans le vide est en régime permanent. Mais l'armature (C) émet des électrons de vitesse négligeable (devant c) qui se dirigent vers l'armature (A) au potentiel $U > 0$.

On admet que les trajectoires des électrons sont rectilignes et perpendiculaires aux plaques. L'intensité passant de (A) à (C) est appelée I . La vitesse des électrons entre les armatures à la distance x de (C) est notée $v(x)$.

13. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de $v(x)$ en fonction de $V(x)$ et des caractéristiques d'un électron (masse m , charge $-e$)
14. Montrer que $\rho(x)v(x) = \text{cte}$ et exprimer la constante en fonction de I et S .
15. Exprimer $\rho(x)$ en fonction de $V(x)$, $\alpha = \frac{I}{S\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}$ et ϵ_0 .
16. Écrire une équation différentielle vérifiée par $V(x)$.
17. On admet que le champ électrique est nul en $x = 0$. Intégrer l'équation précédente après l'avoir multipliée par $\frac{dV}{dx}$ pour obtenir $\frac{dV}{dx}$ en fonction de $V(x)$.
18. En déduire I en fonction de U , pour $U > 0$. Que dire de I si $U < 0$?

5 Jauge de Bayard-Alpert

On se propose d'étudier ici un appareil de mesure des faibles pressions : la jauge de Bayard-Alpert.



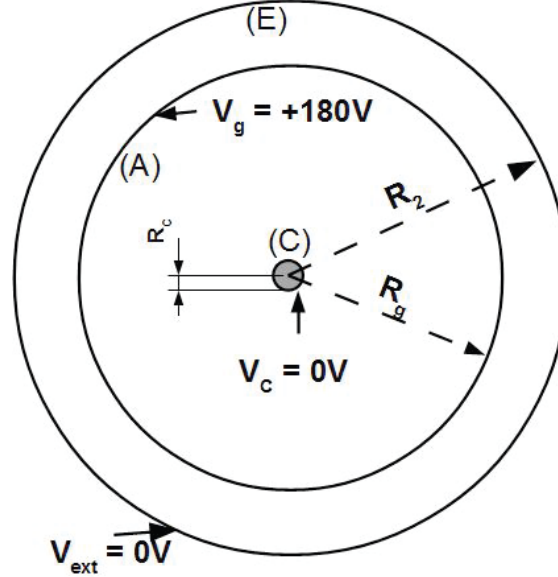
Sonde de Bayard-Alpert

Une jauge de Bayard-Alpert est dite de type « ionique ». Son principe est basé sur l'accélération d'électron émis par un filament (K) au moyen d'une grille (A) plongée dans le gaz à analyser. Les électrons accélérés, en heurtant les molécules du gaz les ionisent. Les ions ainsi formés sont récoltés par un collecteur (C) situé au centre de la grille. Le nombre d'ions collectés et donc le courant généré dans le collecteur est proportionnel au nombre d'électrons émis et au nombre de particules du gaz, donc indirectement à la pression. Pour maximiser le nombre de particules heurtés par les électrons, on construit la grille de manière à confiner les électrons dans un mouvement oscillant au sein du gaz : ils sont ainsi certains de finir par heurter une particule du gaz. On se propose ici d'étudier le champ électrique de confinement ainsi créé.

La géométrie réelle étant relativement complexe, on utilisera ici le modèle simplifié suivant :

- la grille (A) est un cylindre de longueur infinie et d'épaisseur négligeable et de rayon R_g . Elle est portée au potentiel $V_g = +180$ V uniforme
- le collecteur (C) est un cylindre infini plein de rayon R_c porté au potentiel $V_c = 0$ V uniforme.
- Une enceinte métallique extérieure (E), cylindrique de rayon R_2 est maintenue au potentiel $V_{ext} = 0$ V uniforme.

- L'ensemble (A), (C) , et (E), formés des cylindres coaxiaux, possède une symétrie cylindrique.
- un filament rectiligne K est positionné parallèlement à l'axe $\vec{e}_z$ des cylindres, à la distance R_K du centre. On admet que sa présence conserve à l'ensemble A,C,E,K la symétrie cylindrique.
- À l'intérieur se trouve un gaz raréfié : le milieu est assimilable au vide.



Modélisation de la sonde

On notera (Oz) l'axe de symétrie des cylindres (orienté par $\vec{e}_z$). On donne les expressions des opérateurs gradient et laplacien dans les coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

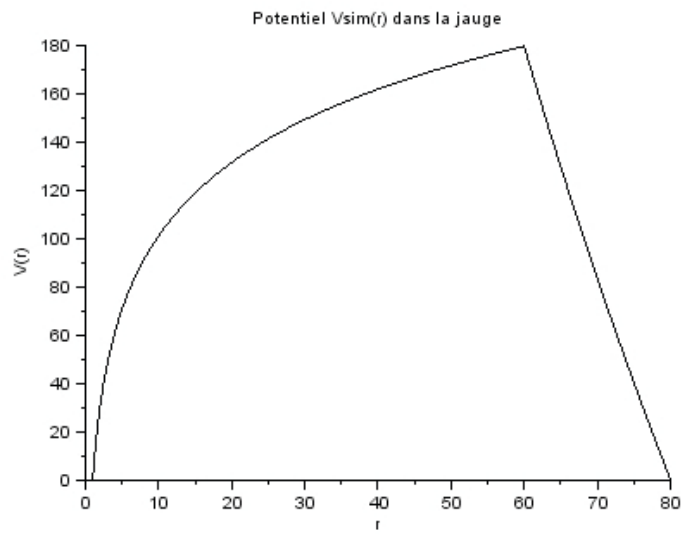
On s'intéresse au champ électrique $\vec{E}(M)$ et au potentiel $V(M)$ en un point M repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

1. Faire apparaître sur un schéma les vecteurs unitaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ de la base cylindrique.
2. Expliquer, par des arguments qualitatifs précis, pourquoi on a $V(M) = V(r)$ et $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

On cherche à déterminer les grandeurs électrostatiques entre C et A.

3. Donner l'équation de Maxwell-Gauss.
4. En déduire l'équation différentielle que vérifie le potentiel $V(r)$ dans cette zone.
5. Exprimer $V(r)$ en fonction de r , R_g , R_c et V_g .
6. Déduire de la question précédente l'expression du champ $\vec{E}(M)$ entre A et C.

L'allure du champ électrique en tout point intérieur de la jauge est donné sur la figure représentant $V_{sim}(M) = V_{sim}(r)$ en fonction de r .



Potentiel $V_{sim}(r)$ (r est en mm)

7. A partir de ce graphique, donner une estimation de R_c et R_g .
8. Donner l'équation littérale du potentiel $V(r)$ entre G et E.
9. En déduire l'expression littérale du champ électrique $\vec{E}$ entre G et E.
10. Reproduire la figure modélisant la sonde et représenter les lignes de champ électrique en précisant leur orientation.