

Travaux Dirigés du chapitre : 5.3 Équations de Maxwell

Partie : 5 Électromagnétisme

Éléments de correction

1 Bille radioactive

1. La première particule est émise à $t = 0$, avec une vitesse v_0 , donc elle a pu parcourir une distance

$$r_c(t) = v_0 t$$

. Pour $r > r_c(t)$ il n'y a pas de particule donc $\rho(r > r_c(t)) = 0$

2. Il n'y a pas de processus créant ou détruisant une charge électrique. Donc si la bille émet N particules par seconde de charge e , sa charge diminue de Ne par seconde, donc pendant une durée t sa charge est de

$$Q(t) = -Net$$

3. Si une particule est émise à l'instant t_0 , alors elle aura se trouve à une distance $r - 0 = v_0(t - t_0)$ de la bille donc $r = v_0(t - t_0)$.

Pendant dt il est émis Ndt particules qui sont entre r et $r + dr$ donc :

$$r = v_0(t - t_0) \text{ et } r + dr = v_0(t + dt - t_0) \text{ donc } dr = v_0 dt$$

donc il est émis

$$\frac{Ndr}{v_0}$$

.

4. $\rho = \frac{dq}{dV}$ or dq est la charge entre les sphères de rayons r et $r + dr$ donc $dq = \frac{eNdr}{v_0}$, et $dV = Sdr = 4\pi r^2 dr$.

donc

$$\rho = \frac{eN}{4\pi v_0 r^2}$$

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \text{ donc } j = \rho v_0$$

donc

$$j = \frac{eN}{4\pi r^2}$$

5. L'équation de conservation de la charge fait apparaitre deux termes $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ et $\text{div}(\vec{j})$.

sous forme intégré :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt} + \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -Ne$$

et

$$\iiint_V \text{div}(\vec{j}) dV = \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j(R)4\pi R^2 = Ne$$

donc on retrouve bien $\frac{dq}{dt} + \iiint_V \text{div}(\vec{j}) dV = 0$

6. Les particules sont chargées, elles subissent donc une force de la part de la bille qui est elle aussi chargée. Elles sont donc accélérées et de vitesse non constante.

2 Champs statiques

1. (a) $\vec{a} = a_x(x)\vec{e}_x$
 (b) $\vec{a} = a_\theta(r)\vec{e}_\theta$
 (c) $\vec{a} = a_r(r)\vec{e}_r$
 (d) $\vec{a} = a_y(x)\vec{e}_y$
2. (a) $\text{div}\vec{a} < 0$
 (b) $\text{div}\vec{a} = 0$
 (c) $\text{div}\vec{a} > 0$
 (d) $\text{div}\vec{a} = 0$
3. (a) $\vec{\text{rot}}\vec{a} = \vec{0}$
 (b) $\vec{\text{rot}}\vec{a}$ parallèle à $+\vec{e}_z$
 (c) $\vec{\text{rot}}\vec{a} = \vec{0}$
 (d) $\vec{\text{rot}}\vec{a}$ parallèle à $+\vec{e}_z$ pour $x < 0$ et parallèle à $-\vec{e}_z$ pour $x > 0$
4. (a) électrostatique
 (b) magnétostatique
 (c) électrostatique
 (d) magnétostatique

3 Une solution aux équations de Maxwell

1. $\text{div}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} (f(z) \exp(-\alpha t)) = 0$ ce qui est cohérent avec $\rho = 0$ dans le vide.
 $\text{div}\vec{B} = \frac{\partial}{\partial y} (g(z) \exp(-\alpha t)) = 0$ ce qui est cohérent avec Maxwell-Flux.
2. Maxwell-Faraday, $\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donc $-\frac{\partial}{\partial z} (f(z) \exp(-\alpha t)) = -\frac{\partial}{\partial t} (g(z) \exp(-\alpha t))$
 donc $\frac{df}{dz} = -\alpha g(z)$
3. Maxwell-Ampère dans le vide de courant, $\vec{\text{rot}}\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 donc $\frac{\partial}{\partial z} (g(z) \exp(-\alpha t)) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (f(z) \exp(-\alpha t))$
 donc $\frac{dg}{dz} = -\epsilon_0 \mu_0 \alpha f(z)$
4. donc $\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{d}{dz} (-\alpha g(z)) = \epsilon_0 \mu_0 \alpha^2 f(z)$
 donc $f(z) = A \cosh(\alpha z/c) + B \sinh(\alpha z/c)$
 or $f(z)$ est paire donc $B = 0$
 donc $f(z) = A \cosh(\alpha z/c)$

or $\vec{E}(0, 0) = E_0 \vec{e}_x$ donc $A = E_0$

donc

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cosh(\alpha z/c) \exp(-\alpha t) \vec{e}_x$$

A l'intérieur du condensateur

1. Car on considère les plaques infinies.
2. équation de Poisson : $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$
pour $\rho = 0$ équation de Laplace $\Delta V = 0$
3. A l'intérieur du condensateur il n'y a pas de charges donc $\Delta V = 0$.
Si on appelle z l'axe du condensateur, on a invariance par translation selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ donc V ne dépend que de z donc $\Delta V = \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$ donc $V = \alpha z + \beta$.
Or les plaques sont séparées d'une distance d , donc on peut prendre comme condition aux limites $V(0) = V_1$ et $V(d) = V_2$, d'où $V(z) = (V_2 - V_1) \frac{z}{d} + V_1$
4. Avec l'équation de Poisson $\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, d'où $V = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} z^2 + \alpha z + \beta$.
On a les mêmes conditions aux limites $V(0) = V_1$ et $V(d) = V_2$, donc $\beta = V_1$ et $\alpha = \frac{V_2}{d} - \frac{V_1}{d} + \frac{\rho}{2\epsilon_0} d$.
D'où $V(z) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} z^2 + \left(V_2 - V_1 + \frac{\rho d^2}{2\epsilon_0} \right) \frac{z}{d} + V_1$

4 Jauge de Bayard-Alpert

- 1.
2. D'après le modèle proposé, la distribution de charges est invariante par translation parallèlement à (Oz) (cylindres infinis) et par rotation autour de l'axe (Oz) (symétrie cylindrique) donc le champ électrostatique et le potentiel électrostatique ne dépendent que de r .
Les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges donc le champ électrique est contenu dans leur intersection : $\vec{E}$ est porté par $\vec{e}_r$.
On a bien $V(M) = V(r)$ et $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$
3. $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
4. $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ (vide de charges)
donc $\text{div}(-\vec{\text{grad}} V) = 0$
donc $\Delta V = 0$
donc $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$ (V ne dépend que de r en coordonnée cylindrique)

5. $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$
 donc $r \frac{dV}{dr} = K_1$
 donc $\frac{dV}{dr} = \frac{K_1}{r}$
 donc si on intègre entre R_c et r
 $V(r) - V(R_c) = K_1 \ln \left(\frac{r}{R_c} \right)$
 or $V(R_c) = 0$ donc $V(r) = K_1 \ln \left(\frac{r}{R_c} \right)$
 or $V(R_g) = V_g$ donc $V_g = K_1 \ln \left(\frac{R_g}{R_c} \right)$
 donc $V(r) = V_g \frac{\ln(r/R_c)}{\ln(R_g/R_c)}$
6. $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$ or $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$
 donc $E(r) = -\frac{dV}{dr}$
 donc $\vec{E} = \frac{-V_g}{r \ln(R_g/R_c)} \vec{e}_r$
7. $R_c \approx 1\text{mm}$ et $R_g \approx 60\text{mm}$
8. On a la même équation $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$
 donc $r \frac{dV}{dr} = K_2$
 donc $\frac{dV}{dr} = \frac{K_2}{r}$
 donc si on intègre entre R_g et r
 $V(r) - V(R_g) = K_2 \ln \left(\frac{r}{R_g} \right)$
 or $V(R_g) = V_g$ donc $V(r) = K_2 \ln \left(\frac{r}{R_g} \right) + V_g$
 or $V(R_2) = 0$ donc $0 = K_2 \ln \left(\frac{R_2}{R_g} \right) + V_g$
 donc $V(r) = V_g \left(1 - \frac{\ln(r/R_g)}{\ln(R_2/R_g)} \right)$
9. de même $E(r) = -\frac{dV}{dr}$
 donc $\vec{E} = \frac{V_g}{r \ln(R_2/R_g)} \vec{e}_r$
- 10.