

Travaux Dirigés du chapitre : 5.4 Propagation

Partie : 5 Electromagnétisme

1 Courants de Foucault dans un cylindre

On place un cylindre d'axe (Oz) , de section $S_0 = \pi R^2$ de longueur L et de conductivité σ dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$. On suppose que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué. On se place en régime lentement variable et on néglige les effets de bords en considérant $L \gg R$. On donne en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

1. On admet que $\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_\theta$. Montrer que cela est cohérent vis à vis des symétries et invariances. On pourra s'appuyer sur l'équation de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Faraday.
2. Montrer que $\vec{E} = \frac{r \omega B_0 \sin(\omega t)}{2} \vec{e}_\theta$ en utilisant une méthode locale et en utilisant une relation intégrée.
3. Déterminer la densité de courant volumique appelée courant de Foucault induite sachant que dans un conducteur ohmique $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

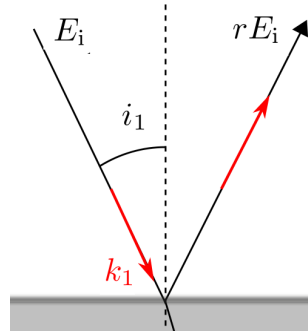
2 Rayonnement du condensateur

Un condensateur plan est constitué par deux disques conducteurs de rayon a , distants de e , d'axe Oz . Le condensateur est un dipôle électrique parcouru par un courant $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

1. Exprimer la charge $q(t)$ et $-q(t)$ portées par les armatures du condensateur.
2. Calculer le champ électromagnétique à l'intérieur du condensateur.
3. En déduire le vecteur de Poynting. On appelle S la surface délimitant la partie latérale du condensateur. S est un cylindre de rayon a , de hauteur e , et d'axe (Oz) . Calculer le flux sortant du vecteur de Poynting à travers S .
4. Relier la puissance électrique du dipôle électrique formée par le condensateur, au flux du vecteur de Poynting et à la variation d'énergie électromagnétique à l'intérieur du condensateur. Conclure.

3 Réflexion sur un métal sous incidence oblique

Une onde plane monochromatique polarisée rectilignement, de pulsation ω , de vecteur d'onde $\vec{k}_1$ se propage dans le vide et arrive avec l'angle d'incidence $i_1 = (-\vec{e}_z, \vec{k}_1)$ sur la surface d'un métal parfaitement conducteur qui occupe le demi-espace $z < 0$. $\vec{k}_1$ est contenu dans le plan (Oyz) .



Dans un premier temps on suppose que le champ électrique $\vec{E}_i$ de l'onde incidente est compris dans le plan d'incidence (Oyz). On rappelle les relations de passage :

$$\vec{E}_2(M, t) - \vec{E}_1(M, t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\vec{B}_2(M, t) - \vec{B}_1(M, t) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

1. Exprimer $\vec{E}_i(M, t)$
2. Montrer qu'il doit exister une onde réfléchie. On admet qu'il s'agit d'une OPPM et que la direction de son vecteur d'onde $\vec{k}_2$ est donnée par la loi de Descartes de l'optique géométrique. Représenter $\vec{k}_2$.
3. Montrer sans calcul que son champ électrique $\vec{E}_r$ est tel que $\|\vec{E}_r(O, t)\| = \|\vec{E}_i(O, t)\|$. Avec O le point d'incidence.
4. Représenter $\vec{E}_r$ et les champs magnétiques $\vec{B}_i$ et $\vec{B}_r$ des deux ondes tels qu'il sont en O.
5. Exprimer $\vec{E}_r(M, t)$
6. Exprimer $\sigma(O, t)$ et $\vec{j}_s(O, t)$
7. Exprimer $\sigma(M, t)$ et $\vec{j}_s(M, t)$, pour un point M de la surface réfléchissante.
8. En déduire une équation locale de conservation de la charge surfacique.
9. Reprendre l'exercice dans le cas où $\vec{E}_i$ est perpendiculaire au plan d'incidence.
10. Quelles sont les composantes du champ électromagnétique qui subissent un déphasage de π à la réflexion sur le métal parfait ?

4 Guide d'onde rectangulaire

On considère un champ de la forme $\vec{E} = A(z) \exp(i(\omega t - kx)) \vec{e}_y$ se propageant dans le vide entre quatre plans conducteurs parfaits localisés en $z = 0$, $z = a$, $y = 0$ et $y = b$, infinis dans la direction (Ox). Cette configuration constitue ce qu'on appelle un guide d'onde rectangulaire. On donne $a = 2,29$ cm, $b = 1,02$ cm.

1. Déduire des relations de passage (voir cour ou exo précédent) deux conditions sur la fonction $A(z)$.
2. Montrer que $A(z)$ satisfait à l'équation différentielle du second ordre suivante : $(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2)A(z) + A''(z) = 0$. En discutant, en fonction des valeurs prises par k , la comptabilité des solutions de cette équation avec les conditions aux limites, en déduire que $A(z)$ est nécessairement une fonction périodique dont on posera l'amplitude égale à E_0 et dont on exprimera la période spatiale en fonction de k , ω et c .

3. Quelle est ainsi la nature de l'onde se propageant dans le guide. Justifier la terminologie utilisée de guide d'onde pour un tel dispositif.
4. Établir la relation de dispersion dans le guide. Montrer que les valeurs de k sont discrètes. A une valeur k_n donnée on associe un mode propre d'ordre n du guide d'onde. Montrer que dans chaque mode la propagation est dispersive. Que devient la relation de dispersion lorsque dans un mode d'ordre n donné, la longueur d'onde λ est très inférieure à a ? Ce résultat est-il prévisible?
5. Montrer que dans chaque mode propre du guide, l'onde ne peut se propager que si sa pulsation ω est supérieure à une pulsation de coupure caractéristique de ce mode ω_c que l'on exprimera en fonction de n , c et a . Calculer la fréquence de coupure $\nu_{c,1}$ dans le mode $n = 1$. Tracer l'allure du champ électrique correspondant aux deux premiers mode de propagation guidée.
6. Tracer l'allure des courbes $k_n = f(\omega)$ correspondant aux trois premiers modes propres.
7. Exprimer la vitesse de phase $v_{\phi_n} = \frac{\omega}{k_n}$ et la vitesse de groupe $v_{g_n} = \frac{d\omega}{dk_n}$ en fonction de c , ω et ω_{c_n} et tracer leur allure en fonction de ω pour une valeur de n donnée, commenter.
8. Étudier la forme du champ magnétique $\vec{B}$ associé à $\vec{E}$. On posera $B_{x_0} = \frac{n\pi E_0}{\omega a} \cos(\frac{n\pi}{a}z)$ et $B_{z_0} = \frac{kE_0}{\omega} \sin(\frac{n\pi}{a}z)$ les amplitudes respectives des composantes de $\vec{B}$ suivant (Ox) et (Oz). L'onde électromagnétique se propageant dans le guide est-elle transverse? $\vec{B}$ est-il en phase avec $\vec{E}$? Ceci est-il en accord avec la structure de l'onde étudiée? Dans quelle mesure peut-on parler de polarisation elliptique pour $\vec{B}$?
9. Étudier qualitativement la conséquence des conditions aux limites imposées aux champs pour les parois du guide, en terme de charges et de courants surfaciques.