

Travaux Dirigés du chapitre : 5.4 Propagation

Partie : 5 Electromagnétisme

Éléments de correction

1 Courants de Foucault dans un cylindre

1. Maxwell-Gauss : $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Maxwell-Faraday : $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Le cylindre est conducteur de conductivité σ donc l'équation de conservation de la charge permet de montrer que $\rho \rightarrow 0$.

donc les équations deviennent :

Maxwell-Gauss : $\text{div}(\vec{E}) = 0$

Maxwell-Faraday : $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Le champs $\vec{E}$ vérifie les mêmes équations que le champs magnétostatique, il vérifie donc les mêmes propriétés avec $\vec{E}$ est analogue au champ magnétostatique, et $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ est analogue à la densité volumique de courant.

Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, donc un plan d'anti-symétrie pour $\vec{E}(M)$, donc $\vec{E}(M) \perp (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$, donc $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_\theta$.

Le système est invariant par translation selon $\vec{e}_z$, donc $\vec{E}(M) = E(r, \theta, t)\vec{e}_\theta$.

Le système est invariant par rotation d'angle θ , donc $\vec{E}(M) = E(r, t)\vec{e}_\theta$.

2.

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) \vec{e}_z &= -\frac{\partial}{\partial t} (B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z) \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E(r, t)) &= \omega B_0 \sin(\omega t) \\ \frac{d}{dr} (r E(r, t)) &= r \omega B_0 \sin(\omega t) \\ r E(r, t) - 0 \times E(0, t) &= \frac{r^2}{2} \omega B_0 \sin(\omega t) - 0 \times \omega B_0 \sin(\omega t) \\ E(r, t) &= \frac{r}{2} \omega B_0 \sin(\omega t)\end{aligned}$$

3.

2 Rayonnement du condensateur

1. On applique l'équation locale de conservation de la charge $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$.

On intègre cette équation sur le volume d'une armature et on trouve :

$$\frac{dq}{dt} = i(t).$$

$$\text{donc } q(t) = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

2. Le champ électrique à l'intérieur du condensateur peut être déterminé par la forme intégrée de Maxwell-Gauss : $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow$ théorème de Gauss donc on retrouve le résultat du

$$\text{condensateur plan : } \vec{E} = -\frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \vec{e}_z = -\frac{q(t)}{S\epsilon_0} \vec{e}_z = -\frac{I_0 \sin(\omega t)}{\omega \pi a^2 \epsilon_0} \vec{e}_z$$

Le champ magnétique est donné par les variations de $\vec{E}$, donc l'équation de Maxwell-

Ampère : $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On se place entre les armatures vides de courant, donc

$$\vec{j} = \vec{0}, \text{ donc } \text{rot}(\vec{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{I_0 \cos(\omega t)}{\pi a^2} \vec{e}_z.$$

On peut donc utiliser une forme intégrée de Maxwell-Ampère analogue au théorème d'Ampère pour obtenir : $\vec{B} = -\mu_0 \frac{r I_0 \cos(\omega t)}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta$

3. Le vecteur de Poynting est défini par $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{I_0 \sin(\omega t)}{\omega \pi a^2 \epsilon_0} \right) \left(-\mu_0 \frac{r I_0 \cos(\omega t)}{2\pi a^2} \right) \vec{e}_r = \frac{r I_0^2 \sin(2\omega t)}{\omega \epsilon_0 (2\pi a^2)^2} \vec{e}_r$

$$\text{Le flux sortant du vecteur de Poynting } \Phi(\vec{\Pi}) = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \frac{a I_0^2 \sin(2\omega t)}{\omega \epsilon_0 (2\pi a^2)^2} 2\pi a e = \frac{e I_0^2 \sin(2\omega t)}{2\pi a^2 \omega \epsilon_0}$$

4. La puissance reçue du condensateur est $P = u(t)i(t) = \frac{q(t)i(t)}{C} = \frac{eq(t)i(t)}{\epsilon_0 \pi a^2} = \frac{e I_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{\omega \epsilon_0 \pi a^2} = \frac{e I_0^2 \sin(2\omega t)}{2\pi a^2 \omega \epsilon_0} = \Phi(\vec{\Pi})$

L'équation locale de conservation de l'énergie (équation de Poynting) est $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$

Or à l'intérieur du condensateur $\vec{j} = \vec{0}$, donc $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = 0$.

On prend la forme intégrée de cette équation sur le volume entre les armatures :

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \Phi(\vec{\Pi}).$$

On conclut que la puissance reçue par un condensateur est égale à la variation d'énergie du champs électromagnétique : $P = \frac{dU_{em}}{dt}$

3 Réflexion sur un métal sous incidence oblique

1. L'onde électrique incidente se propage dans le vide donc est transverse.

Donc $\vec{E}_i(M, t)$ est polarisée perpendiculairement à $\vec{k}_1$

$$\text{Donc } \vec{E}_i(M, t) = \underline{E}_{i,0} e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM})} (\cos(i_1) \vec{e}_y + \sin(i_1) \vec{e}_z)$$

2. Dans un conducteur parfait $\vec{E} = \vec{0}$, donc il n'y a pas d'onde transmise.
 De plus dans le vide, $\vec{j} = \vec{0}$ donc $p = \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$, et dans le conducteur parfait $\vec{E} = \vec{0}$ donc $p = \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$. Donc il n'y a pas d'énergie cédée aux porteurs de charge.
 Donc l'énergie portée par l'onde incidente doit bien aller quelque part, d'où l'existence de l'onde réfléchie.
 $\vec{k}_2 = \sin(i_1)\vec{e}_y + \cos(i_1)\vec{e}_z$
3. $\vec{E}_r$ se propage dans le vide donc est transverse, la composante de l'onde réfléchie parallèle à l'interface est donc $\vec{E}_r \cdot \vec{e}_y = \pm \|\vec{E}_r\| \cos(i_1)$.
 Or à l'interface, en O, la composante parallèle du champ électrique est continue donc :
 $\vec{E}_2(O, t) \cdot \vec{e}_y = \vec{E}_1(O, t) \cdot \vec{e}_y$
 mais dans le conducteur parfait il n'y a pas de champ électrique donc $\vec{E}_2 = \vec{0}$
 donc $0 = \vec{E}_1(O, t) \cdot \vec{e}_y$
 et dans le milieu 1, le champ électrique est constitué des ondes incidentes et réfléchies donc :
 $\vec{E}_i(O, t) \cdot \vec{e}_y + \vec{E}_r(O, t) \cdot \vec{e}_y = 0$
 donc $\|\vec{E}_i(O, t)\| \cos(i_1) \pm \|\vec{E}_r(O, t)\| \cos(i_1) = 0$
 donc $\|\vec{E}_i(O, t)\| = \|\vec{E}_r(O, t)\|$
4. On utilise la structure de l'onde telle que $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est une base orthogonale directe
 donc $\vec{B}_i$ et $\vec{B}_r$, sont dirigés vers $+\vec{e}_x$
5. $\vec{E}_r(M, t) = \underline{E}_{i,0} e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM})} (-\cos(i_1)\vec{e}_y + \sin(i_1)\vec{e}_z)$
6. D'après les relations de passages : $\underline{\sigma}(O, t) = \epsilon_0 (\vec{E}_i(O, t) + \vec{E}_r(O, t)) \cdot \vec{e}_z = 2\epsilon_0 \sin(i_1) \underline{E}_{i,0} e^{i\omega t}$
 donc en notation réelle $\sigma(O, t) = 2\epsilon_0 \sin(i_1) E_{i,0} \cos(\omega t + \phi)$
 $\underline{j}_S(O, t) \wedge \vec{e}_z = \frac{\vec{B}_i(O, t) + \vec{B}_r(O, t)}{\mu_0}$
 $\underline{j}_S(O, t) = \frac{2E_{i,0} e^{i\omega t}}{c\mu_0} \vec{e}_y$
 donc en notation réelle $\vec{j}_S(O, t) = \frac{2E_{i,0}}{c\mu_0} \cos(\omega t + \phi) \vec{e}_y$
7. Pour un point M de la surface $M(x, y, 0)$,
 donc $\vec{k}_1 \cdot \vec{OM} = \vec{k}_2 \cdot \vec{OM} = k \sin(i_1)y$
 donc $\vec{E}_i(M, t) = \underline{E}_{i,0} e^{i(\omega t - k \sin(i_1)y)} (\cos(i_1)\vec{e}_y + \sin(i_1)\vec{e}_z)$
 et $\vec{E}_r(M, t) = \underline{E}_{i,0} e^{i(\omega t - k \sin(i_1)y)} (-\cos(i_1)\vec{e}_y + \sin(i_1)\vec{e}_z)$
 donc $\underline{\sigma}(M, t) = 2\epsilon_0 \sin(i_1) \underline{E}_{i,0} e^{i(\omega t - k \sin(i_1)y)}$
 donc en notation réelle $\sigma(M, t) = 2\epsilon_0 \sin(i_1) E_{i,0} \cos(\omega t - k \sin(i_1)y + \phi)$
 donc $\underline{j}_S(M, t) = \frac{2E_{i,0} e^{i(\omega t - k \sin(i_1)y)}}{c\mu_0} \vec{e}_y$
 donc en notation réelle $\vec{j}_S(M, t) = \frac{2E_{i,0}}{c\mu_0} \cos(\omega t - k \sin(i_1)y + \phi) \vec{e}_y$
8. On calcule $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -2\omega\epsilon_0 \sin(i_1) E_{i,0} \sin(\omega t - k \sin(i_1)y + \phi)$
 On calcule $\text{div}(\vec{j}_S) = \frac{\partial j_S}{\partial y} = k \sin(i_1) \frac{2E_{i,0}}{c\mu_0} \sin(\omega t - k \sin(i_1)y + \phi)$
 Or $\omega\epsilon_0 = ck\epsilon_0 = k\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{k}{c\mu_0}$

donc $\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_S) = 0$

On retrouve une équation locale de conservation de la charge surfacique.

9. Dans le cas où $i_1 = 0$, on retrouve tous les résultats établis dans la partie Réflexion sur un conducteur parfait.
10. $\vec{E}_i(M, t) = \underline{E}_{i,0} e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{OM})} (\cos(i_1) \vec{e}_y + \sin(i_1) \vec{e}_z)$
 et $\vec{E}_r(M, t) = \underline{E}_{i,0} e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{OM})} (-\cos(i_1) \vec{e}_y + \sin(i_1) \vec{e}_z)$
 Donc la composante parallèle à l'interface selon $\vec{e}_y$ subit un déphasage de π et la composante normale à l'interface selon $\vec{e}_z$, ne la subie pas.

4 Guide d'onde rectangulaire

1. En $z = 0$, le champ $\vec{E}$ est parallèle à l'interface donc continu. Or dans un conducteur parfait, le champ électrique est nul donc $\vec{E}(z = 0) = \vec{0}$ donc $A(0) = 0$.
 De même en $z = a$, $A(a) = 0$.

2. Le champ électromagnétique se propage dans le vide donc vérifie l'équation de d'Alembert,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{E}$$

En coordonnées cartésiennes,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \right)$$

En remplaçant par l'expression donnée de $\vec{E}$,

$$-\omega^2 A(z) e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y = -c^2 k^2 A(z) e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y + \vec{0} + c^2 \frac{d^2 A}{dz^2} e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

$$\text{donc } \frac{d^2 A}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) A(z) = 0$$

Si $k > \frac{\omega}{c}$, alors $A(z) = \alpha e^{\sqrt{k^2 - \omega^2/c^2} z} + \beta e^{-\sqrt{k^2 - \omega^2/c^2} z}$

et $A(0) = 0$ et $A(a) = 0$, implique que $\alpha = \beta = 0$,

donc si $k > \frac{\omega}{c}$, alors il n'y a pas d'onde qui se propage dans le guide d'onde.

Donc $k < \frac{\omega}{c}$, et $A(z) = \alpha \cos(\sqrt{\omega^2/c^2 - k^2} z) + \beta \sin(\sqrt{\omega^2/c^2 - k^2} z)$

et $A(0) = 0$ implique que $\alpha = 0$, donc $A(z) = \beta \sin(\sqrt{\omega^2/c^2 - k^2} z)$

et $A(a) = 0$ implique que $\sqrt{\omega^2/c^2 - k_n^2} = \frac{n\pi}{a}$ avec $n > 1$ entier, donc on obtient une nouvelle relation de dispersion $\omega^2 = c^2 k_n^2 + \frac{\pi^2 c^2}{a^2} n^2$ avec $n > 1$ entier.

$$\text{donc } \underline{E} = E_0 \sin\left(n \frac{\pi z}{a}\right) \exp(i(\omega t - kx)) \vec{e}_y$$

$$\text{donc } \vec{E} = E_0 \sin\left(n \frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx + \phi) \vec{e}_y$$

3. $\vec{E} = E_0 \sin\left(n \frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - k_n x + \phi) \vec{e}_y$

L'onde se propageant dans le guide est progressive dans la direction $\vec{e}_x$ (variable $\omega t - k_n x$), mais elle est stationnaire dans la direction $\vec{e}_z$ (variables séparées z et t).

Le guide d'onde, guide donc la propagation dans la direction $\vec{e}_x$ et empêche celle dans la direction $\vec{e}_z$.

4. La relation de dispersion est $\omega^2 = c^2 k_n^2 + \frac{\pi^2 c^2}{a^2} n^2$ avec $n > 1$ entier.

La vitesse de phase est $v_\phi = \frac{\omega}{k_n}$

or $k_n = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2 n^2/a^2}$

$$\text{donc } v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2 a^2} n^2}}$$

donc v_ϕ dépend de ω , la propagation est dispersive (et $v_\phi > c$)

si $\lambda_n \ll a$ alors $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \gg \frac{\pi n}{a}$ donc $\omega^2 \approx c^2 k_n^2$, on retrouve la relation de dispersion du vide.

Si a est très grand, l'effet du guide d'onde n'est plus présent et on retrouve les propriétés de propagation dans le vide.

5. $\omega^2 = c^2 k_n^2 + \frac{\pi^2 c^2}{a^2} n^2$ avec $n > 1$ entier,

donc $\omega > \omega_c$ avec $\omega_c = \frac{\pi c}{a} n$.

Pour le mode $n = 1$, $\nu_{c,1} = \frac{c}{2a} = 6,55 \text{ GHz}$

6. $k_n = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2 n^2/a^2}$

7. $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$ donc ($v_\phi > c$)

$$\omega^2 = c^2 k_n^2 + \omega_c^2 \text{ donc } 2\omega d\omega = 2c^2 k_n dk_n \text{ donc } v_g = \frac{d\omega}{dk_n} = \frac{c^2}{v_\phi}$$

$$\text{donc } v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \text{ donc } (v_g < c)$$

8. $\vec{E} = E_0 \sin\left(n \frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx + \phi) \vec{e}_y$

$$\text{et } \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{donc } -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{e}_z$$

$$\text{donc } -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -n \frac{\pi}{a} E_0 \cos\left(n \frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx + \phi) \vec{e}_x + k E_0 \sin\left(n \frac{\pi z}{a}\right) \sin(\omega t - kx + \phi) \vec{e}_z$$

$$\text{donc } \vec{B} = \frac{n\pi E_0}{a\omega} \cos\left(n \frac{\pi z}{a}\right) \sin(\omega t - kx + \phi) \vec{e}_x + \frac{k E_0}{\omega} \sin\left(n \frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx + \phi) \vec{e}_z$$

donc $\vec{B} = B_{x0} \sin(\omega t - kx + \phi) \vec{e}_x + B_{z0} \cos(\omega t - kx + \phi) \vec{e}_z$ avec les composantes B_{x0} et B_{z0} données dans l'énoncé.

Le champ électrique est transverse, mais le champ magnétique n'est pas transverse car il comporte une composante selon $\vec{e}_x$.

Le champ magnétique comporte une composante transverse en phase avec le champ électrique et une composante longitudinale en quadrature de phase avec le champ électrique.

Le champ électromagnétique n'a donc pas une structure d'onde plane progressive, mais a deux composantes : une composante transversale qui a une structure d'onde plane progressive et une composante longitudinale qui a une structure d'onde stationnaire.

Le champ magnétique a deux composantes selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$ en quadrature de phase et d'amplitude différentes, il s'agit donc d'une polarisation elliptique.

9. Pour les parois en $z = 0$ et $z = a$, le champs $\vec{E}$ est parallèle aux interfaces donc $\sigma_{z=0} = \sigma_{z=a} = 0$

Pour les parois en $y = 0$ et $y = b$, le champ $\vec{E}$ est normal aux interfaces donc on peut établir les valeurs des charges surfaciques :

$$\sigma_{y=0} = \epsilon_0 E_0 \sin\left(n \frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx + \phi)$$

$$\text{et } \sigma_{y=b} = -\epsilon_0 E_0 \sin\left(n \frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx + \phi)$$

on a donc deux armatures de charges opposées en $y = 0$ et $y = b$ qui ont des charges oscillantes.

Pour les courants surfaciques, on s'intéresse à la composante du champ magnétique parallèle à l'interface.

Pour $z = 0$ et $z = a$, on s'intéresse à la composante B_{x0}

$$\text{donc } \vec{j}_{S,z=0} = \frac{n\pi E_0}{\mu_0 a \omega} \sin(\omega t - kx + \phi) \vec{e}_y \text{ et } \vec{j}_{S,z=a} = \frac{n\pi E_0}{\mu_0 a \omega} (-1)^n \sin(\omega t - kx + \phi) \vec{e}_y.$$

Il y a donc sur les parois $z = 0$, $z = a$, des courants surfaciques en quadrature des charges surfaciques sur les parois $y = 0$ et $y = b$, et dirigées vers ces parois. Donc ces courants surfaciques sur les parois $z = 0$ et $z = a$ chargent et déchargent les parois $y = 0$ et $y = b$.