

TD Superposition d'ondes lumineuses et Exemples de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young

1 Trous de Young en présence d'une lame de verre

1. On calcule la différence de marche $\delta = S_2M - S_1M$ en coordonnée cartésienne $\delta = ((x + a/2)^2 + y^2 + D^2)^{1/2} - ((x - a/2)^2 + y^2 + D^2)^{1/2}$
on factorise par le terme le plus grand
 $\delta = D(1 + (x/D + a/2D)^2 + (y/D)^2)^{1/2} - D(1 + (x/D - a/2D)^2 + (y/D)^2)^{1/2}$
on fait un DL à l'ordre 2 en $x/D, a/D, y/D$
donc $\delta \approx \frac{xa}{D}$
donc $\Delta\Phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi xa}{\lambda_0 D}$
2. Formule de Fresnel $I(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\Phi)$
or ici les trous sont identiques donc $I_1 = I_2 = I_0$
donc $I = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi xa}{\lambda_0 D}\right)\right)$
et $\Delta\Phi(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$
3. Une interfrange i est la distance entre deux franges donc $I(x+i) = I(x)$ donc $\frac{2\pi a(x+i)}{\lambda_0 D} = \frac{2\pi xa}{\lambda_0 D} + 2\pi$ donc $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$
4. La différence de marche $\delta' = (S_2M) - (S_1M)$
donne $\delta' = S_2M - S_1A - nAB - BM$
donc $\delta' = S_2M - S_1A - AB - BM + AB - nAB$
donc $\delta' = \delta - (n-1)AB$
or en incidence quasi-normale $AB = e$ donc
donc $\delta' = \delta - (n-1)e$
donc $\Delta\Phi' = \frac{2\pi xa}{\lambda_0 D} - \frac{2\pi(n-1)e}{\lambda_0}$
5. On a toujours $I_1 = I_2 = I_0$ donc $I(x) = 2I_0(1 + \cos(\Delta\Phi'))$
donc $I(x) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi xa}{\lambda_0 D} - \frac{2\pi(n-1)e}{\lambda_0}\right)\right)$
le contraste et l'amplitude sont identiques, l'interfrange aussi.
Par contre la position de la frange centrale est déplacée vers le haut :

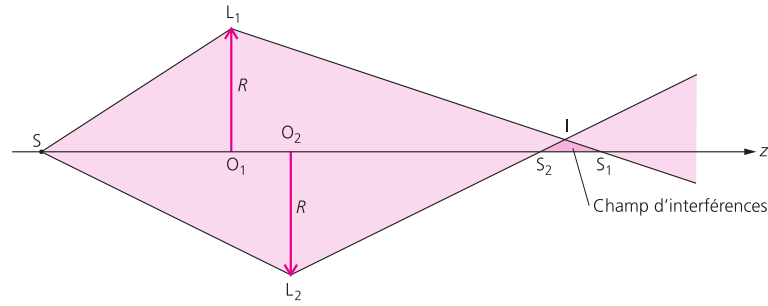
$$\Delta\Phi'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{(n-1)eD}{a}$$

2 Mesure de l'indice de l'air dans un montage différentiel des trous de Young

- $(SO)_1 = (SA_1) + nA_1A_2 + (A_2F_1) + (F_1O)$
 $(SO)_2 = (SB_1) + nB_1B_2 + (B_2F_2) + (F_2O)$
tous les chemins sont symétriques et les points intermédiaires appartiennent aux mêmes surfaces d'onde donc $\delta = (SO)_2 - (SO)_1 = 0$
- Après le pompage $(SO)_1 = (SA_1) + A_1A_2 + (A_2F_1) + (F_1O)$
donc $(SO)_1 = (SO)_2 + A_1A_2 - nA_1A_2$
donc $\delta' = (n-1)A_1A_2$
or $A_1A_2 = L$ donc $\delta' = (n-1)L$
- On trace les rayons parallèles provenant de F_1 et F_2 convergeant vers un point M de coordonnée x quelconque de l'écran.
L'écran est à une distance focale f' de la lentille donc les rayons arrivent sous incidence d'angle θ tel que $\tan \theta = \frac{x}{f'}$
On trace la surface d'onde plane passant par F_1 , on reconnait un triangle rectangle d'hypoténuse $F_1F_2 = a$ et d'angle au sommet θ
donc $(F_2M) - (F_1M) = a \sin \theta$
or dans les conditions de Gauss $\theta \ll \frac{\pi}{2}$ donc $(F_2M) - (F_1M) = a\theta = \frac{ax}{f'}$
donc avant pompage $\delta(x) = \frac{ax}{f'}$ d'où $\delta(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$
après pompage $\delta'(x) = \frac{ax}{f'} + (n-1)L$ d'où $\delta'(x'_0) = 0 \Rightarrow x'_0 = -\frac{(n-1)Lf'}{a}$
- On dit que l'on voit $N = 53$ franges défiler donc $p - p' = N$ donc $x_0 - x'_0 = Ni$ avec i l'interfrange
donc $\frac{(n-1)Lf'}{a} = N \frac{\lambda_0 f'}{a}$
donc $n = 1 + \frac{N\lambda_0}{L}$
l'application numérique donne $n = 1,00029$

3 Bilentille de Meslin

- S est sur l'axe optique donc S_1 et S_2 aussi, pour obtenir leurs positions on utilise les relations de conjugaison : $\frac{1}{\overline{O_1S_1}} - \frac{1}{\overline{O_1S}} = \frac{1}{f'}$ et $\frac{1}{\overline{O_2S_2}} - \frac{1}{\overline{O_2S}} = \frac{1}{f'}$
donc $\overline{O_1S_1} = \frac{f'\overline{O_1S}}{f' + \overline{O_1S}} = 60 \text{ cm}$
et $\overline{O_2S_2} = \frac{f'\overline{O_2S}}{f' + \overline{O_2S}} = \frac{f'(\overline{O_2O_1} + \overline{O_1S})}{f' + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1S}} = 40 \text{ cm}$
- On trace les rayons passant par les extrémités des lentilles



On peut déterminer la dimension du champ d'interférence dans la direction z par $S_2S_1 = O_1S_1 - O_1O_2 - O_2S_2 = 10 \text{ cm}$.

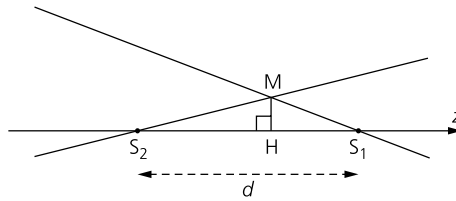
Pour déterminer la dimension du champ d'interférence perpendiculairement à l'axe optique, on pose I le croisement des rayons extrêmes et H_I le projeté de I sur l'axe optique.

Par théorème de Thalès, $\frac{H_I I}{H_I S_2} = \frac{R}{O_2 S_2}$ et $\frac{H_I I}{H_I S_1} = \frac{R}{O_1 S_1}$

donc $S_1 S_2 = H_I S_2 + H_I S_1 = \left(\frac{O_2 S_2}{R} + \frac{O_1 S_1}{R} \right) H_I I$

donc $H_I I = \frac{S_1 S_2 R}{O_2 S_2 + O_1 S_1} = 1,7 \text{ mm}$

3. Les rayons se croisent en un point M passent par S_2 et S_1



La différence de marche est $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$

donc $\delta = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) + (S_1M)$

Comme S_2 est l'image de S par la lentille L_2 tous les rayons passant par la lentille L_2 ont le même chemin optique, on prend notamment celui qui passe par le centre de la lentille.

De même pour S_1 , et comme au centre de la lentille les deux lentilles ont même focale et rayons R , les rayons traversent la même épaisseur de verre donc $(SS_2) - (SS_1) = SS_2 - SS_1 = -S_1 S_2 = -d$.

Si on note $z = S_2 H$ et $r = HM$, alors $(S_2 M) + (S_1 M) = (z^2 + r^2)^{1/2} + ((d-z)^2 + r^2)^{1/2}$.

Or d'après le calcul du champ d'interférence $r \ll z, (d-z)$

donc $(S_2 M) + (S_1 M) \approx z \left(1 + \frac{r^2}{2z^2} \right) + (d-z) \left(1 + \frac{r^2}{2(d-z)^2} \right)$

donc $(S_2 M) + (S_1 M) \approx d \left(1 + \frac{r^2}{2z(d-z)} \right)$

donc $\delta = -d + d \left(1 + \frac{r^2}{2z(d-z)} \right) = \frac{dr^2}{2z(d-z)}$

4. Si l'écran E est placé à une distance $D = 85 \text{ cm}$ de la source S alors il est au milieu de S_1 et S_2 car $SS_1 = SO_1 + O_1 S_1 = 80 \text{ cm}$ et $SS_2 = SS_1 + d = 90 \text{ cm}$, donc on a $z = \frac{d}{2}$.

Donc la différence de marche en un point M de l'écran est $\delta = \frac{2r^2}{d}$.

De plus en S_2 les rayons passent de convergent à divergent donc on doit rajouter $+\pi$ au déphasage entre les deux rayons.

$$\text{Donc } \Delta\Phi = \frac{4\pi r^2}{\lambda_0 d} + \pi$$

Le point I se trouve sur l'écran, donc le champ d'interférence sur l'écran est donné par $r < H_I I$ soit $r < 1,7 \text{ mm}$

$$\text{donc pour } r < r_{max} = 1,7 \text{ mm, } I(r) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi r^2}{\lambda_0 d} + \pi \right) \right)$$

On observe donc sur l'écran des demi-anneaux brillants dans le champ d'interférence de rayons r_k tels que $p = k$ entier

$$\text{donc } \frac{4r_k^2}{\lambda_0 d} + 1 = 2k$$

$$\text{donc } r_k = \sqrt{\frac{(2k-1)}{4} \lambda_0 d}$$

$$\text{Or } r_k \leq r_{max} \text{ donc } 1 \leq k \leq \frac{2r_{max}^2}{\lambda_0 d} + \frac{1}{2}$$

donc il y a 111 franges brillantes en forme de demi-anneaux.

4 Système interférentiel à trois fentes fines parallèles

1. (a) F_1 et F_2 forment des fentes d'Young espacées de a avec $\delta = ax/D$
donc $E_1 = a \cos(\omega t + \Delta\phi) = a \cos\left(\omega t + 2\pi \frac{\delta}{\lambda_0}\right)$ et $E_2 = a \cos(\omega t)$
 F_2 et F_3 forment des fentes d'Young espacées de a avec $\delta = ax/D$
donc $E_2 = a \cos(\omega t)$ et $E_3 = a \cos(\omega t - \Delta\phi) = a \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{\delta}{\lambda_0}\right)$
or $E = E_1 + E_2 + E_3$
donc $E = a \cos(\omega t + \Delta\phi) + a \cos(\omega t) + a \cos(\omega t - \Delta\phi)$
or $\cos(\omega t + \Delta\phi) + \cos(\omega t - \Delta\phi) = 2 \cos(\omega t) \cos(\Delta\phi)$
donc $E = a \cos(\omega t)(1 + 2 \cos(\Delta\phi))$
donc $I = k \langle E^2 \rangle = \frac{ka^2}{2} (1 + 2 \cos(\Delta\phi))^2$
donc $I = \frac{I_{max}}{9} (1 + 2 \cos(\Delta\phi))^2$
(b) pour $\Delta\phi = 2p\pi$ avec p entier il y a un maximum global $I = I_{max}$
pour $\Delta\phi = 2(p+1)\pi$ avec p entier il y a un maximum local $I = \frac{I_{max}}{9}$
l'interfrange entre frange $I = I_{max}$ est donnée par $\Delta\phi(i+x) - \Delta\phi(x) = 2\pi$ donc
 $i = \frac{\lambda D}{a}$
2. Si on ferme la fente centrale on a des trous d'Young séparé de $2a$ donc $I' = \frac{2I_{max}}{9} (1 + \cos(2\Delta\phi))$
et $i' = \frac{\lambda D}{2a}$

3. $E'' = a \cos(\omega t + \Delta\phi) + 2a \cos(\omega t) + a \cos(\omega t - \Delta\phi)$
donc $I'' = \frac{4I_{max}}{9}(1 + \cos(\Delta\phi))^2$

5 Réseau à échelottes

1. on trace les surfaces d'ondes passant par les points de réflexion des rayons sur le réseau.
 $\delta_{21} = a \sin \gamma + a \sin(\gamma + \theta)$
 $\Delta\phi = 2\pi \frac{a}{\lambda_0} (\sin \gamma + \sin(\gamma + \theta))$
2. On observe un pic pour $\Delta\phi = 2p\pi$ avec p entier,
or $-1 \leq \sin(\gamma + \theta) \leq 1$
donc $2\pi \frac{a}{\lambda_0} (\sin \gamma - 1) \leq 2p\pi \leq 2\pi \frac{a}{\lambda_0} (\sin \gamma + 1)$
donc $\frac{a}{\lambda_0} (\sin \gamma - 1) \leq p \leq \frac{a}{\lambda_0} (\sin \gamma + 1)$
donc $(12 - 1) \leq \frac{a}{\lambda_0} (\sin \gamma + 1) - \frac{a}{\lambda_0} (\sin \gamma - 1) \leq (13 - 1)$
donc $\frac{11\lambda_0}{2} \leq a \leq 6\lambda_0$