

SESSION 2024

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE – FILIÈRE PCSI

PHYSIQUE

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Données

- Constantes :
 - Champ de pesanteur terrestre : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
 - Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- On rappelle que la variation d'entropie ΔS
 - d'un corps monophasé liquide ou solide de capacité thermique massique c et de masse m qui passe de la température initiale T_i à la température finale T_f vaut $\Delta S = m \cdot c \cdot \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$.
 - d'un gaz parfait de capacités thermiques molaires $C_{V,m}$ et $C_{P,m}$, et de quantité de matière n qui passe de la température initiale T_i , de la pression initiale P_i , du volume initial V_i à la température finale T_f , à la pression finale P_f , au volume final V_f :

$$\Delta S = nC_{P,m} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)$$

$$\Delta S = nC_{V,m} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$\Delta S = nC_{V,m} \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) + nC_{P,m} \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

- L'eau est caractérisée par les valeurs regroupées dans le tableau ci-dessous :

	Masse volumique ρ à 0°C	Capacité thermique c massique à 0°C
Eau à l'état liquide	$1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$c_\ell = 4 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Eau à l'état solide	$917 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$c_g = 2 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Le point triple de l'eau correspond à la température $T_t = 273,16 \text{ K}$ et à la pression $P_t = 0,06 \text{ bar}$. L'équilibre solide \rightleftharpoons liquide de l'eau a lieu à $T_{\text{fusion}} = 273,15 \text{ K}$ pour la pression atmosphérique $P^0 = 1 \text{ bar}$.

Le point critique de l'eau correspond à la température $T_c = 647,15 \text{ K}$ et à la pression $P_c = 218 \text{ bars}$.

- L'enthalpie massique de fusion de la glace vaut $\Delta h_{\text{fusion}} = L = 333 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.
- Les masses atomiques molaires en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ valent 1 pour l'hydrogène et 16 pour l'oxygène.
- **Aide de calcul** : $\ln(2) < 1$

Première partie

Thermodynamique (~ 2 heures)

Les deux exercices de cette partie sont entièrement indépendants.

Exercice n°1 Étude d'un cycle d'un gaz parfait ($\sim 1h10$)

On étudie un cycle de trois transformations subies par n d'un gaz parfait diatomique de coefficient isentropique $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$.

- À l'état A , le volume vaut V_A , la température T_A et la pression P_A .
- La transformation $A \rightarrow B$ est une compression isobare. Le volume est divisé par 2.
La transformation a lieu au contact d'un thermostat de température $T_t = T_B$.
- La transformation $B \rightarrow C$ est une compression isochore, qui l'amène à une pression double de celle en B .
- La transformation $C \rightarrow A$ est une détente isotherme.
La transformation a lieu au contact de l'atmosphère de température $T_{\text{atm}} = T_A$.

- Q1. Donner les expressions des capacités thermiques à volume constant et à pression constante en fonction de n , R et γ , puis en fonction de n et R uniquement.
- Q2. Représenter le cycle subit par le gaz dans le diagramme de Clapeyron (P en fonction de V).
- Q3. Exprimer P_B et P_C en fonction de P_A uniquement.
Exprimer V_B et V_C en fonction de V_A uniquement.
Enfin, exprimer T_B et T_C en fonction de T_A uniquement.
- Q4. On étudie la transformation $A \rightarrow B$:
- (a) Établir l'expression du travail W_{AB} algébriquement reçu par le gaz en fonction de n , R et T_A . Commenter le signe.
 - (b) Établir l'expression du transfert thermique Q_{AB} algébriquement reçu par le gaz en fonction de n , R et T_A . Commenter le signe.
 - (c) Exprimer la variation d'entropie du gaz au cours de cette transformation en fonction de n et R .
 - (d) Exprimer l'entropie échangée $S_{e,AB}$ algébriquement reçue par le gaz en fonction de n et R .
 - (e) En déduire l'entropie créée $S_{c,AB}$. Quel est son signe ? commenter.
- Q5. On étudie la transformation $B \rightarrow C$:
- (a) Que vaut le travail W_{BC} reçu algébriquement par le gaz ?
 - (b) Établir l'expression du transfert thermique Q_{BC} algébriquement reçu par le gaz en fonction de n , R et T_A . Commenter le signe.
 - (c) Exprimer l'entropie échangée $S_{e,BC}$ algébriquement reçue par le gaz.
 - (d) En déduire l'entropie créée $S_{c,BC}$. Commenter.
- Q6. On étudie la transformation $C \rightarrow A$:
- (a) Exprimer le travail W_{CA} algébriquement reçu par le gaz en fonction de n , R et T_A . Commenter le signe.
 - (b) En déduire l'expression du transfert thermique Q_{CA} algébriquement reçu par le gaz en fonction de n , R , et T_A . Commenter le signe.
 - (c) Exprimer l'entropie échangée $S_{e,CA}$ algébriquement reçue par le gaz.
 - (d) En déduire l'entropie créée $S_{c,CA}$. Commenter.

Exercice n°2 Eau et glace (~ 50 min)

Q1. Tracer l'allure du diagramme d'état de l'eau avec en abscisse la température et en ordonnée la pression en indiquant les phases stables dans les différents domaines.

On considère une masse $m = 1$ kg d'eau qui passe, à la pression atmosphérique P^0 , de la température initiale $\theta_i = 4$ °C à la température finale $\theta_f = -10$ °C, qui est la température du thermostat au contact de qui elle se trouve.

Q2. Au cours d'une transformation isobare, quelle est la version du premier principe pertinente à utiliser ? L'énoncer.

Q3. Quelle propriété ont l'enthalpie et l'entropie permettant d'étudier la transformation qui nous intéresse ici ?

Q4. Exprimer le transfert thermique reçu par cette masse d'eau.
Faire l'application numérique.

Q5. Exprimer l'entropie échangée reçue algébriquement par la masse d'eau. Faire l'application numérique.

Q6. Exprimer la variation d'entropie de la masse d'eau.

Q7. En déduire l'expression de l'entropie créée. Peut-on prévoir son signe ? Si oui, quel serait-il ? Pourquoi ?

On place dans une tasse constituée de deux couches de métal séparées par de l'air. Sur une durée d'une heure, on peut la considérer comme calorifugée. Vous versez 200 mL de jus de fruit sortant du réfrigérateur (à 5 °C) et un glaçon de 10 g sortant du congélateur (à -18 °C) dans cette tasse.

On modélise le jus de fruit par de l'eau.

On suppose qu'à l'état final, tout est liquide.

La question suivante est de type « résolution de problème », un raisonnement détaillé et rigoureux est attendu. Tout élément de raisonnement correct, même partiel, sera récompensé.

Q8. En rédigeant très rigoureusement, établir l'expression de la température du contenu de la tasse une fois l'équilibre atteint.

Deuxième partie

Expérience de Rüchardt (~ 2 heures)

Les différentes parties sont indépendantes.

Ce sujet propose une étude de l'expérience de Rüchardt. Elle consiste à placer un gaz dans un récipient étanche muni d'un tube (figure 1). On ferme le tout par un piston qui peut librement coulisser dans le tube. Le diamètre du piston est du mieux possible égal à celui du tube, ce qui assure une étanchéité (pas de fuite de gaz).

Sous l'action de son poids, le piston commence à descendre. Ceci fait augmenter la pression dans le récipient, ce qui finit par arrêter la descente du piston, et par le faire remonter. Il s'en suit une série d'oscillations, comme on peut le voir sur la figure 2.

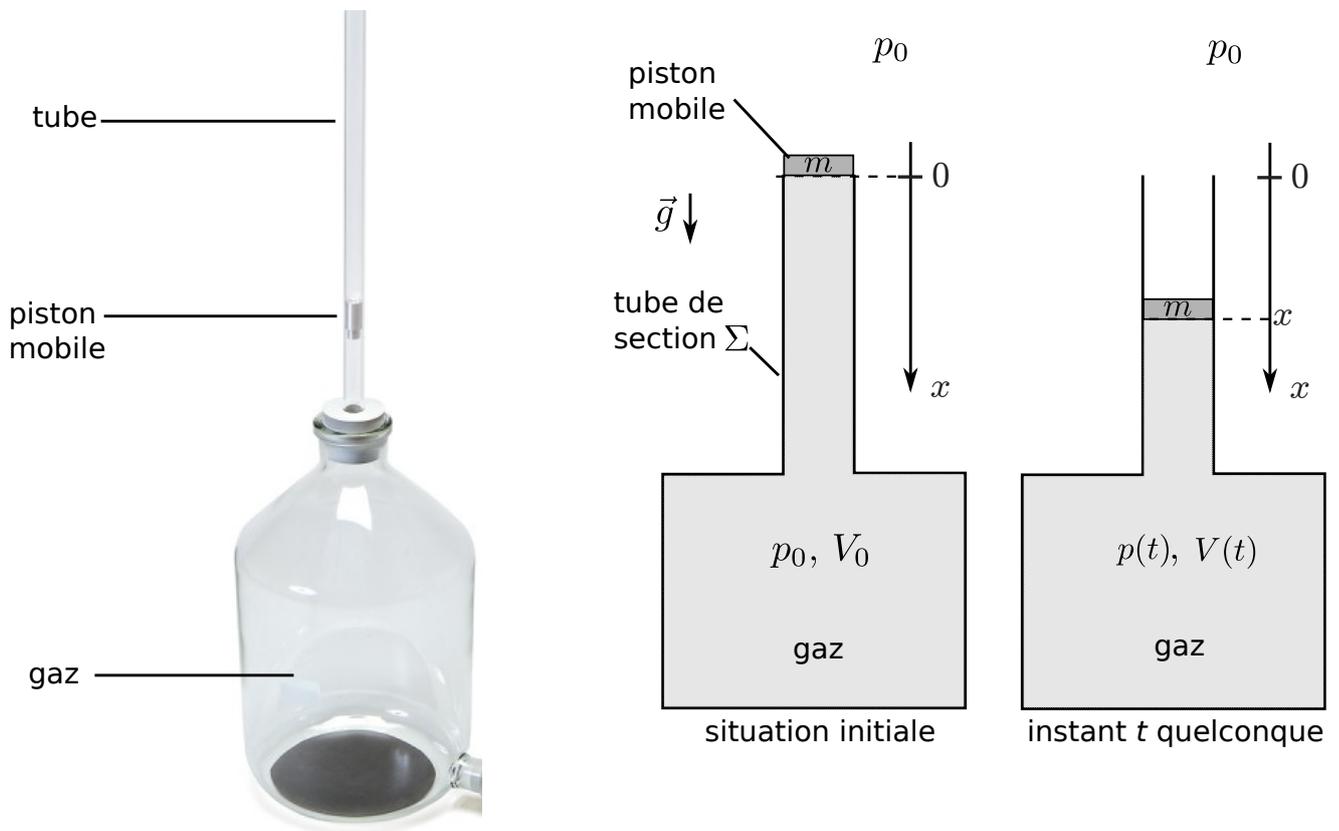


FIGURE 1 – Photographie et schéma de l'expérience

Proposée par Rüchardt en 1929, perfectionnée à plusieurs reprises, cette expérience et ses variantes ont permis des mesures extrêmement précises du coefficient adiabatique $\gamma = C_p/C_V$ de divers gaz.

I Détermination de la période des oscillations

On utilise les notations de la figure 1. En particulier :

- V_0 est le volume initial de l'ensemble du gaz (récipient + partie dans le tube sous le piston).
 $V(t)$ est le volume de ce même gaz, mais à un instant t quelconque. La pression du gaz est notée $p(t)$ et sa température $T(t)$.
- La pression atmosphérique est p_0 . C'est aussi la pression dans le récipient à l'instant initial.
- La section du tube est notée Σ .
- La masse du piston est m et l'intensité de la pesanteur est g .
- \vec{e}_x est un vecteur unitaire descendant.

Q1. Rappeler la loi de Laplace reliant $p_0, V_0, p(t), V(t)$, avec $\gamma = C_p/C_V$ l'exposant adiabatique du gaz. Rappeler les hypothèses nécessaires pour que la loi de Laplace s'applique.

On suppose dans toute cette partie I que cette loi s'applique.

Q2. Établir une relation entre le volume $V(t), V_0$, la section Σ et l'abscisse x du piston (telle que définie sur la figure 1).

On admet que la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le piston s'écrit :

$$\vec{F} = p_0 \Sigma \vec{e}_x - p(t) \Sigma \vec{e}_x$$

Q3. En utilisant la loi de Laplace et un développement limité valable pour $\Sigma x/V_0 \ll 1$, montrer que la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le piston se met sous la forme :

$$\vec{F} = -\gamma k x \vec{e}_x \quad (1)$$

avec k une constante à exprimer en fonction des données du problème.

Le candidat pourra admettre cette relation (1) pour poursuivre.

I.1 Méthode de Rüchardt

Q4. En plus de \vec{F} , la seule autre force prise en compte comme agissant sur le piston est la force de pesanteur. À l'aide d'une étude mécanique, établir une équation différentielle portant sur $x(t)$.

L'écrire sous une forme canonique en faisant intervenir la pulsation propre ω_0 . Donner l'expression de ω_0 en fonction de k, γ et m .

Q5. Établir l'expression de la solution $x(t)$ de cette équation différentielle, en fonction de $\omega_0, t, m, g, \gamma, k$, ainsi que de deux constantes A et B qu'on ne cherchera pas à déterminer.

Q6. Pour l'expérience considérée ici, $m/k = 4,01 \times 10^{-2} \text{ s}^2$. Le récipient étant rempli d'air, on mesure une période des oscillations $T_0 = 1,08 \text{ s}$. Exprimer γ en fonction de m/k et de T_0 .

Pour information, l'application numérique donne $\gamma = 1,36$, et la valeur théorique est 1,4.

I.2 Méthode de Rinkel

Une seconde méthode, exploitée par Rinkel en 1929, consiste à mesurer la distance maximale L parcourue par le piston avant qu'il ne remonte pour la première fois. Le piston est lâché en $x = 0$ sans vitesse initiale.

On utilise ici une méthode énergétique afin de déterminer l'expression de L .

Q7. Donner, en faisant intervenir les grandeurs m, g, x et \dot{x} , les expressions de l'énergie cinétique E_c du piston et de son énergie potentielle de pesanteur $E_{p,pes}$.

Donner (sans démonstration) l'expression de l'énergie potentielle associée à la force $\vec{F} = -\gamma k x \vec{e}_x$. On pourra raisonner par analogie avec l'énergie potentielle élastique associée à la force de rappel d'un ressort.

Q8. En utilisant ce qui précède, déterminer l'expression de la distance L en fonction de g, k, γ et m .

II Étude mécanique avec frottements

Un pointage vidéo réalisé sur une expérience est montré sur la figure 2. L'amortissement de la courbe $x(t)$ montre qu'il y a présence de dissipation (frottements solides ou fluides, échanges thermiques entre le gaz et le récipient, non uniformité de la pression, amortissement d'ondes acoustiques...). L'objectif de cette partie est de modéliser cette courbe, sans chercher à comprendre le détail du processus de dissipation.

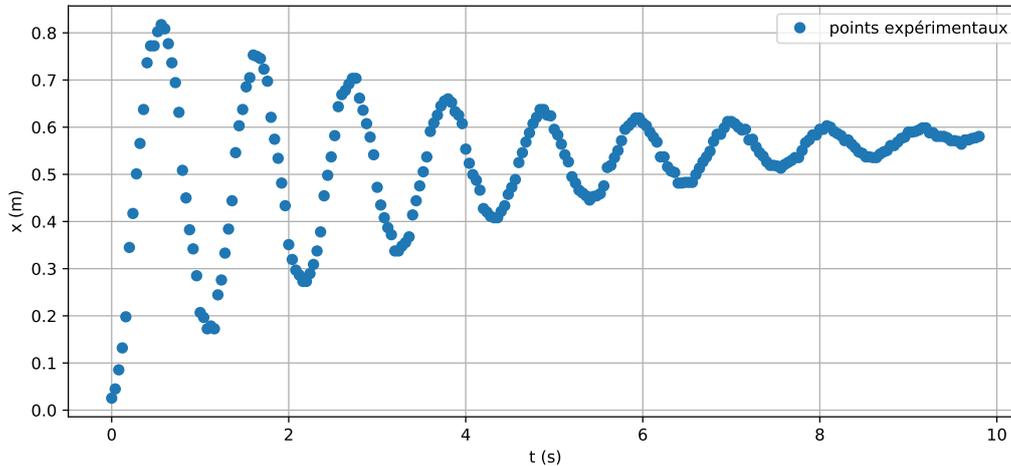


FIGURE 2 – Données issues d'un pointage vidéo. L'échelle des x est approximative, celle des t est précise.

Nous supposons que l'équation du mouvement du piston s'écrit sous la forme suivante, et nous allons tester si ceci permet une description correcte de l'enregistrement $x(t)$:

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = g \quad (2)$$

La pulsation propre de ce système est ω_0 , son expression théorique reste la même que précédemment. Le facteur de qualité Q traduit la présence plus ou moins forte de dissipation. Le second membre g est constant.

Q9. En vous aidant de la figure 2, et sans faire de calculs, donner en justifiant une valeur approchée de Q .
Comment se nomme le type de régime dans lequel se trouve le système ?

Q10. On écrit la forme générale des solutions de l'équation homogène ainsi :

$$x_H(t) = (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)e^{-\mu t}$$

Établir (*on attend donc une justification précise !*) les expressions de Ω et de μ en fonction de ω_0 et Q .

Donner la forme générale des solutions $x(t)$ de l'équation (2).

Q11. On suppose que la masse est lâchée en $x = 0$ sans vitesse initiale. Déterminer alors les expressions des constantes A et B en fonction de Ω , μ , ω_0 et g .

Q12. Déterminer l'expression de la position d'équilibre, $x_{\text{éq}}$.

Q13. Tracer l'allure de la solution $x(t)$. On fera apparaître sur le graphique : la position initiale $x(0)$, la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$, et la pseudo-période $T = 2\pi/\Omega$.

Q14. Y a-t-il une différence significative entre la période propre T_0 et la pseudo-période T ? Justifier.

Q15. Un modèle des données est représenté figure 3. En utilisant une de vos expressions précédentes, et les valeurs numériques en légende de la figure, en déduire une valeur approchée de Q .

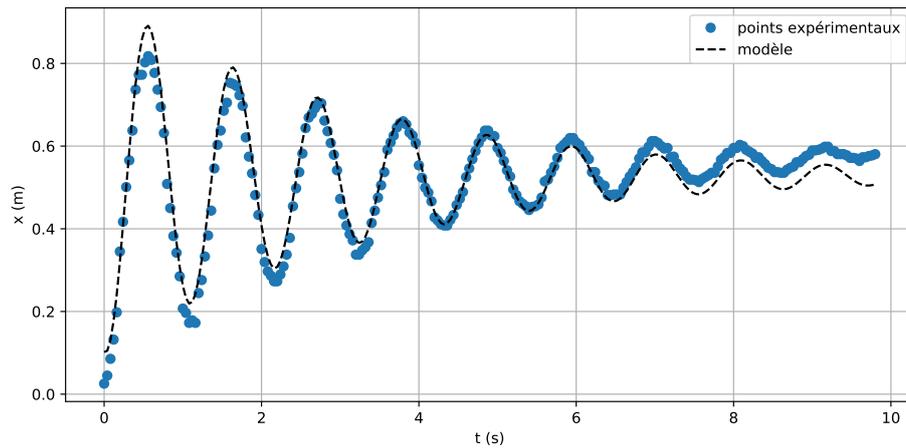


FIGURE 3 – Données et modèle du type $C + (A * \cos(\Omega * t) + B * \sin(\Omega * t)) * \exp(-\mu * t)$.

Le programme retourne, en unités cohérentes SI :

$$\Omega = 5.83, \mu = 0.30, A = -0.43, B = -0.059, C = 0.53$$

Q16. Un second modèle, présenté figure 4, est en meilleur accord avec les données. Proposer une cause physique possible à l'existence du terme supplémentaire en $D * t$.

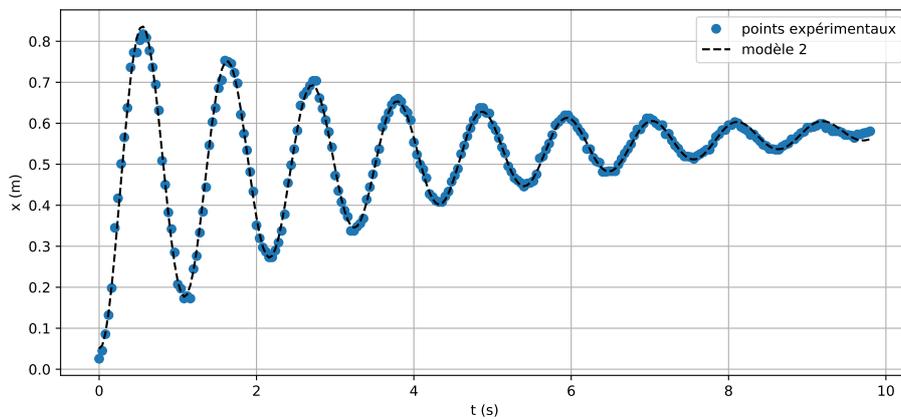


FIGURE 4 – Données et modèle du type $C + (A * \cos(\Omega * t) + B * \sin(\Omega * t)) * \exp(-\mu * t) + Dt$.

Le programme retourne, en unités cohérentes SI :

$$\Omega = 5.82, \mu = 0.29, A = -0.42, B = -0.037, C = 0.47, D = 0.011$$

III Étude en régime sinusoïdal forcé

En 1940, Clark et Katz modifient la méthode de Rüchardt afin d'en améliorer la précision. Ils obtiennent des valeurs de γ associées à des incertitudes relatives de l'ordre de 0,1%, et qui serviront de référence pour la dizaine d'années qui suivent.

Par rapport à la méthode de Rüchardt, ils procèdent à deux modifications principales :

- Le piston mobile sépare maintenant, de façon étanche, deux compartiments. Son oscillation n'est plus verticale, mais horizontale.
- Un électroaimant exerce une force $\vec{F}_E(t) = F_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$ sur le piston mobile.

On admet que sous certaines hypothèses, tout ceci modifie l'équation du mouvement pour donner :

$$m\ddot{x} = -\gamma kx - \lambda\dot{x} + F_E(t) \quad (3)$$

avec λ un coefficient de frottement, k une constante de raideur qui dépend, comme dans le cas précédent, de la géométrie du système et de la pression du gaz au repos, et $F_E(t) = F_0 \cos(\omega t)$ un forçage à la pulsation ω imposée.

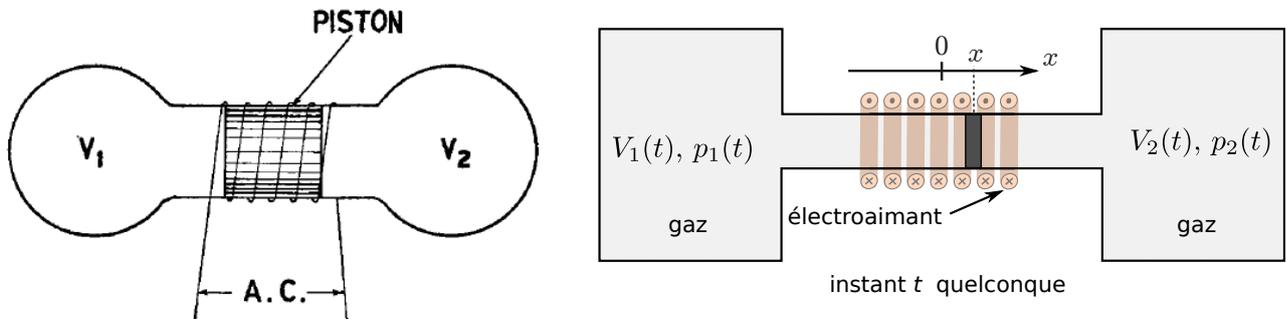


FIGURE 5 – schéma de la manipulation, à gauche issue de l'article original (source : <https://doi.org/10.1139/cjr40a-002>), à droite retravaillée

III.1 Mise en équation

Clark et Katz exploitent le phénomène de résonance. Pour le mettre en évidence, nous utilisons la notation complexe (avec j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$) :

- le signal $F_E(t) = F_0 \cos(\omega t)$ est représenté par $\underline{F}_E(t) = F_0 e^{j\omega t}$;
- la position de la masse est du type $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$, représentée par $\underline{x}(t) = \underline{X}_0 e^{j\omega t}$, avec l'amplitude complexe $\underline{X}_0 = X_0 e^{j\varphi}$.

Q17. À partir de l'équation (3), établir une expression de l'amplitude complexe \underline{X}_0 . L'écrire sous la forme

$$\underline{X}_0 = \frac{A}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} \quad (4)$$

On donnera les expressions de A , ω_0 et Q en fonction de F_0 , λ , k , γ et m .

Le candidat pourra admettre cette relation (4) pour poursuivre.

Q18. Donner l'expression de l'amplitude X_0 du signal $x(t)$, en fonction de ω , ω_0 , Q et A .

Q19. Indiquer vers quoi tend X_0 lorsque la pulsation du forçage ω tend vers 0, puis lorsqu'elle tend vers $+\infty$.

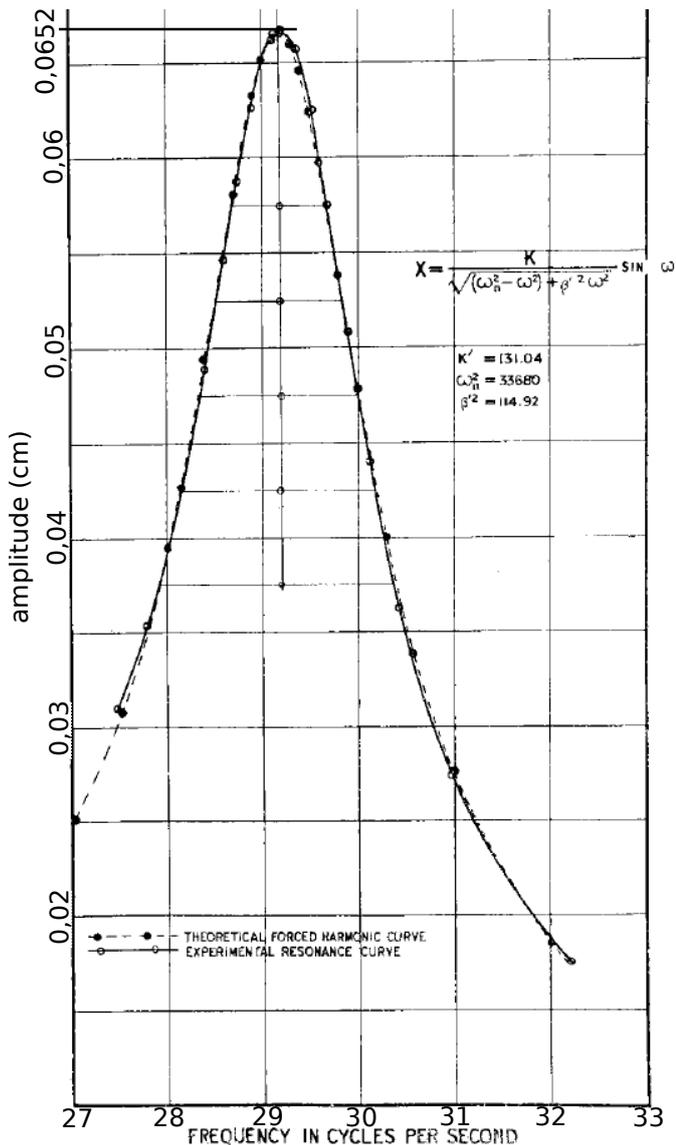
Q20. On pose $u = \omega/\omega_0$. Expliquer pourquoi la recherche d'un maximum de la fonction $X_0(\omega)$ est équivalente à la recherche d'un minimum pour la fonction $f(u) = (1 - u^2)^2 + u^2/Q^2$.

Q21. Montrer que $f(u)$ admet un minimum en $u \neq 0$ seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donner alors l'expression de u , noté u_r , pour lequel $f(u)$ est minimale.

- Q22. On note ω_r la pulsation non nulle pour laquelle $X_0(\omega)$ est maximale, lorsque $Q > 1/\sqrt{2}$. Donner l'expression de ω_r en fonction de ω_0 et de Q .
Que dire du rapport ω_r/ω_0 lorsque $Q \approx 10$ comme ici ?
- Q23. En partant de l'expression (4), donner l'expression de X_0 en $\omega = \omega_0$. En déduire les valeurs de X_0 et de φ pour la pulsation ω_0 .
- Q24. Tracer l'allure de la courbe $X_0(\omega)$, en précisant les expressions en $\omega = 0$ et $\omega = \omega_0$.

III.2 Exemples de résultats

Clark et Katz exploitent la mesure de ω_r pour remonter à celle de γ . Ils prennent en compte diverses corrections non abordées ici (écart aux gaz parfaits, mise en mouvement du gaz, non adiabaticité..). La figure 6 montre des exemples de valeurs obtenues.



July 15, 1938:	1.401 ₆
	1.401 ₄
	1.401 ₃
Feb. 24, 1939:	1.401 ₃
	1.400 ₈
	1.401 ₀
March 7, 1939:	1.401 ₂
	1.400 ₉
	<hr/>
Average	1.401 ₂

FIGURE 6 – Gauche : courbe de X_0 en fonction de la fréquence (en Hz) obtenue par Clark et Katz.
Droite : valeurs obtenues pour du diazote, sous 1 bar, lors de différentes répétitions de l'expérience. (source : doi.org/10.1139/cjr40a-003)

- Q25. On note γ_i la valeur numéro i de γ obtenue par Clark et Katz sur la figure 6 (droite). Il y a $N = 8$ valeurs. "Average" est la moyenne de ces 8 valeurs.
Quelle opération effectuer pour évaluer l'incertitude-type sur cette valeur moyenne ?
- Q26. On souhaite estimer la valeur du facteur de qualité Q pour l'expérience de la figure 6 (gauche). On rappelle que les fréquences de coupures $f_{c,1}$ et $f_{c,2}$ sont définies comme celles pour lesquelles $X_0(f) = (X_0)_{\max} / \sqrt{2}$. Pour une résonance assez piquée comme ici, on a la relation

$$|f_{c,1} - f_{c,2}| \approx \frac{f_r}{Q}$$

avec f_r la fréquence de résonance. On donne $\sqrt{2} \approx 1,4$.

Exploiter la figure 6 (gauche) pour en déduire une valeur de Q . Expliquer votre démarche, par exemple à l'aide d'une reproduction de l'allure de la figure 6 sur votre copie. On arrondira raisonnablement les valeurs pour faire les applications numériques.

On s'intéresse ensuite aux valeurs de γ obtenues. La valeur prédite par la théorie, pour un gaz parfait diatomique, est $\gamma = 1,4$.

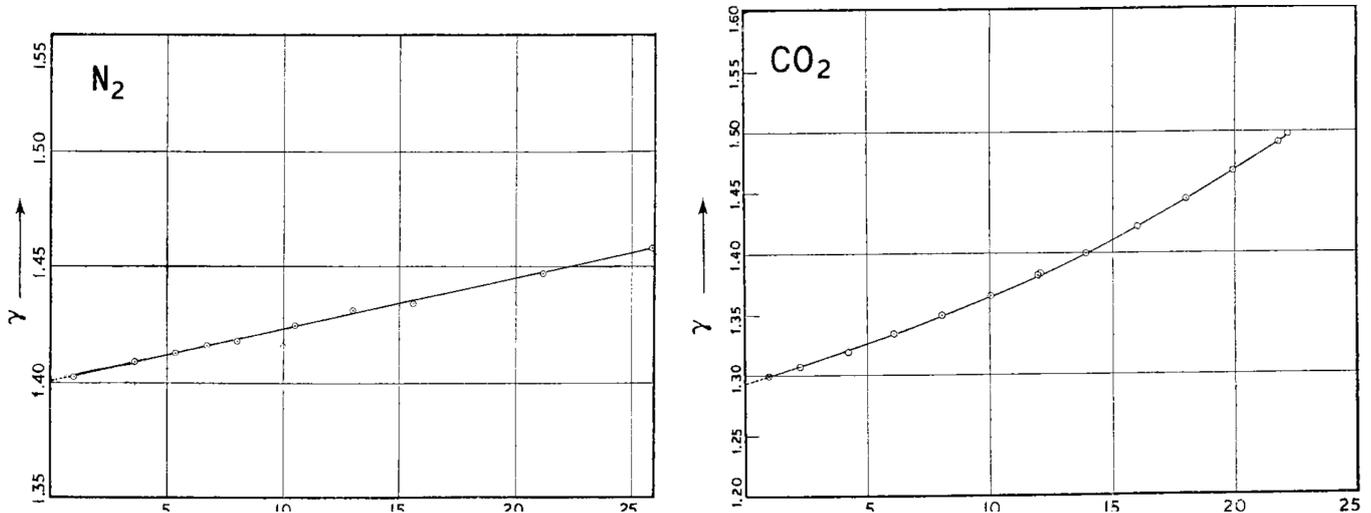


FIGURE 7 – valeurs de γ obtenues par Clark et Katz, à différentes pressions.
Gauche : pour N_2 . Droite : pour CO_2

- Q27. On considère les résultats pour le diazote N_2 (figure 7, gauche). Qu'est-ce qui explique les écarts de plus en plus importants à la valeur 1,4 à mesure que la pression augmente ?
- Q28. On considère les résultats pour le CO_2 (figure 7, droite). Qu'est-ce qui explique les écarts importants à la valeur 1,4, même à basse pression ?