DS n°2 - Partie 2 - Maths - Correction

Exercice 1

Soit $m \in \mathbb{R}$. On résout dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} -(5+m)x + 3y = 0 \\ 6x - (2+m)y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - (2+m)y = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ -(5+m)x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - (2+m)y = 0 \\ \Big(18-(2+m)(5+m)\Big)y = 0 & 6L_2+(5+m)L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - (2+m)y = 0 \\ \Big(-m^2-7m+8\Big)y = 0 \end{cases}$$

On résout alors l'équation $-m^2-7m+8=0$.
Pour cette équation, $\Delta = 49+4\times 8 = 81$ donc les deux solutions sont $\dfrac{7-9}{-2} = 1$ et $\dfrac{7+9}{-2} = -8$.
On distingue alors les cas :

- Si $m = 1$

$$(S_1) \Leftrightarrow , \begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x = y$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (S_1) \text{ est : } \left\{ (x,2x) \;\middle|\; x\in\mathbb{R} \right\} .}$

- Si $m = -8$

$$(S_{-8}) \Leftrightarrow , \begin{cases} 6x + 6y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = -x$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (S_{-8}) \text{ est : } \left\{ (x,-x) \;\middle|\; x\in\mathbb{R} \right\} .}$

- Si $m \neq 1$ et $m \neq -8$

$$(S_m) \Leftrightarrow , \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si } m\in\mathbb{R}\backslash\{1,-8\}, \text{ l'ensemble des solutions de } (S_m) \text{ est : } \left\{ (0,0) \right\} .}$

Exercice 2

1. (a) On calcule :

$$\begin{aligned} \mu\nu &= \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\,\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \\ &= \sqrt[3]{\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(7-5\sqrt{2}\right)} \\ &= \sqrt[3]{7^2-(5\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt[3]{49-50} \\ &= \sqrt[3]{-1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \mu^3+\nu^3 &= \left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right)^3 \\ &= 7+5\sqrt{2}+7-5\sqrt{2} \\ &= 14 \end{aligned}$$

$\boxed{\mu\nu = -1 \text{ et } \mu^3+\nu^3 = 14}$

(b) On développe :

$$\begin{aligned} (\mu+\nu)^3 &= \mu^3+3\mu^2\nu+3\mu\nu^2+\nu^3 \\ &= \mu^3+\nu^3+3\mu\nu(\mu+\nu) \\ &= 14-3(\mu+\nu) \end{aligned}$$

$\boxed{(\mu+\nu)^3 = 14-3(\mu+\nu)}$

2. (a) On calcule :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^3+3\lambda-14 \\ &= 14-3\lambda+3\lambda-14 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\boxed{P(\lambda)=0}$.

(b) On calcule : $P(2) \;=\; 2^3+3\times 2-14 \;=\; 0$

Ainsi : $\boxed{2 \text{ est solution de l'équation } P(x)=0}$.

Pour trouver a, b et c, on force la factorisation par $(x-2)$ au brouillon.

Il semble que $a=1$, $b=2$ et $c=7$ conviennent. Vérifions-le.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(x-2)(x^2+2x+7) \;=\; x^3+2x^2+7x-2x^2-4x-14 \;=\; x^3+3x-14 \;=\; P(x)$

$\boxed{\text{En posant } a=1,\ b=2 \text{ et } c=7, \text{ on a bien : } \forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)\ .}$

(c) On résout sur $\mathbb{R}$.

En utilisant la factorisation de la question 2b, il vient :

$P(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x=2 \text{ ou } x^2+2x+7=0$

Or, pour le trinôme, $\Delta = 4-4\times 7 = -24 < 0$. Ainsi, la deuxième équation n'a pas de solution réelle.

$\boxed{\text{Sur } \mathbb{R}, \text{ l'ensemble des solutions de l'équation } P(x)=0 \text{ est } \{2\}.}$

Ainsi, on sait que :

- D'une part, l'équation $P(x)=0$ a une seule solution réelle qui est 2.
- D'autre part, λ est une solution réelle de l'équation $P(x)=0$.

Nécessairement : $\boxed{\lambda=2}$.

3. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-\mu)(x-\nu) \\ &= x^2-(\mu+\nu)x+\mu\nu \\ &= x^2-2x-1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ Q(x)=x^2-2x-1\ .}$

(b) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} Q(x)=0 &\Leftrightarrow (x-\mu)(x-\nu)=0 \\ &\Leftrightarrow x=\mu \text{ ou } x=\nu \end{aligned}$$

Ainsi, μ et ν sont les solutions de l'équation $Q(x)=0$.

C'est-à-dire, avec la question 3a : $\boxed{\mu \text{ et } \nu \text{ sont solutions de l'équation } x^2-2x-1=0}$.

4. On résout sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$.
   Pour cette équation, $\Delta = 4 + 4 = 8$.
   Cette équation a donc deux solutions qui sont $\dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.
   Par ailleurs, les solutions de cette équation sont μ et ν.

   Pour pouvoir apparier les valeurs, on compare :
   - $1-\sqrt{2} < 1+\sqrt{2}$
   - $7-5\sqrt{2} < 7+5\sqrt{2}$ donc, en passant à la racine cubique, $\nu < \mu$

   On en déduit que : $\boxed{\mu = 1+\sqrt{2}}$ et $\boxed{\nu = 1-\sqrt{2}}$.

Exercice 3

1. (a) $z_1 \in \mathsf{L}$ donc $z_1 = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
De même, $z_2 = c + id$ avec $c, d \in \mathbb{Z}$.

$z_1 + z_2 \ = \ a + ib + c + id \ = \ (a+c) + i(b+d)$.
Or : a et c sont des entiers, donc $a + c \in \mathbb{Z}$.
Et : b et d sont des entiers, donc $b + d \in \mathbb{Z}$.
Ceci prouve que $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) \in \mathbb{Z}$ et donc $\boxed{z_1 + z_2 \in \mathsf{L}}$.

$z_1\, z_2 \ = \ (a+ib)(c+id) \ = \ ac - bd + i(ad + bc)$
Or : a, b, c, d sont des entiers, donc $ac - bd \in \mathbb{Z}$.
Et : a, b, c, d sont des entiers, donc $ad + bc \in \mathbb{Z}$.
Ceci prouve que $\mathrm{Re}(z_1\, z_2) \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Im}(z_1\, z_2) \in \mathbb{Z}$ et donc $\boxed{z_1\, z_2 \in \mathsf{L}}$.

(b) On commence par reformuler le résultat précédent : la somme de deux éléments de L appartient à L et le produit de deux éléments de L appartient à L.
Par extension, tout somme finie d'éléments de L est un élément de L et tout produit fini d'éléments de L est un élément de L.

Par définition, $S = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1}\, (2i)^{n-k}$.

On fixe $k \in [\![1, n-1]\!]$, et on s'intéresse au terme $\binom{n}{k}(2-i)^{k-1}\,(2i)^{n-k}$:

- $2 - i \in \mathsf{L}$ donc, par produits, $(2-i)^{k-1} \in \mathsf{L}$
- $2i \in \mathsf{L}$ donc, de même, $(2i)^{n-k} \in \mathsf{L}$
- $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ donc $\binom{n}{k} \in \mathsf{L}$
- Ainsi, par produits, $\binom{n}{k}(2-i)^{k-1}\,(2i)^{n-k} \in \mathsf{L}$

S est donc une somme de termes qui appartiennent tous à L, et donc $\boxed{S \in \mathsf{L}}$.

Ainsi, on peut écrire $S = a + ib$ avec a et b des entiers.
Et, comme $|S|^2 \ = \ \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 \ = \ a^2 + b^2$, $|S|^2$ est donc un entier, c'est-à-dire $\boxed{|S|^2 \in \mathbb{Z}}$.

2. On calcule :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}(2-i)^{k-1}\,(2i)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(2-i)^{k-1}\,(2i)^{n-k} \ - \ \binom{n}{0}(2-i)^{-1}(2i)^n \ - \ \binom{n}{n}(2-i)^{n-1}(2i)^0 \\
&= \frac{1}{2-i} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(2-i)^{k}\,(2i)^{n-k} \ - \ \frac{(2i)^n}{2-i} \ - \ (2-i)^{n-1} \\
&= \frac{(2-i+2i)^n}{2-i} \ - \ \frac{(2i)^n}{2-i} \ - \ (2-i)^{n-1} && \text{(formule du binôme de Newton)} \\
&= \frac{(2+i)^n \ - \ (2i)^n \ - \ (2-i)^n}{2-i} \\
&= \frac{(2i)^n}{i-2} && (\text{car } (2+i)^n = (2-i)^n)
\end{aligned}$$

On obtient bien $\boxed{S = \dfrac{(2i)^n}{i-2}}$.

On calcule :

$|S|^2 \;=\; \left|\dfrac{(2i)^n}{i-2}\right|^2 \;=\; \dfrac{|2i|^{2n}}{|i-2|} \;=\; \dfrac{2^{2n}}{5} \;=\; \dfrac{4^n}{5}$

$\boxed{|S|^2 \;=\; \dfrac{4^n}{5}}$

3.
   - D'une part, la question 1b prouve que $|S|^2 \in \mathbb{Z}$.
   - D'autre part, comme 4^n n'est pas divisible par 5, la question 2 prouve que $|S|^2 \notin \mathbb{Z}$.

   On a une contradiction. Donc $z^n \neq 1$.

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\; z^n \neq 1}$

Exercice 4

1. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$.
   0 n'est pas solution de l'équation, donc on peut chercher z sous forme exponentielle.
   On écrit $z = r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ et on résout :

$$\begin{aligned} & z^5 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & (re^{i\theta})^5 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & r^5 e^{5i\theta} = e^{i\times 0} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} r^5 = 1 \\ 5\theta \equiv 0\,[2\pi] \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} r = 1 & \text{(car } r \in \mathbb{R}) \\ \theta \equiv 0\,[\frac{2\pi}{5}] \end{cases} \end{aligned}$$

   Or, même s'il y a une infinité d'angles θ qui sont congrus à 0 modulo $\dfrac{2\pi}{5}$, il n'y a que cinq complexes z associés.

   $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } z^5 = 1 \text{ est } \left\{1\,,\ e^{(2i\pi)/5}\,,\ e^{(4i\pi)/5}\,,\ e^{(6i\pi)/5} \text{ et } e^{(8i\pi)/5}\right\}\ .}$

   (b) $\boxed{e^{(2i\pi)/5} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$

   A l'aide du cercle trigonométrique, on constate que $e^{(8i\pi)/5}$ est le conjugué de $e^{(2i\pi)/5}$.
   D'où : $\boxed{e^{(8i\pi)/5} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$

   On obtient les résultats concernant $e^{(4i\pi)/5}$ à l'aide des règles de calcul sur sin et cos :
   $e^{(4i\pi)/5} = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$ d'où $\boxed{e^{(4i\pi)/5} = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$

   Enfin, à l'aide du cercle trigonométrique, on constate que $e^{(6i\pi)/5}$ est le conjugué de $e^{(4i\pi)/5}$.
   D'où : $\boxed{e^{(6i\pi)/5} = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$

2. (a) • Analyse
   On suppose qu'il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ z^5 - 1 = (z-1)\,(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4)$$

   Soit $z \in \mathbb{C}$. On développe :

$$\begin{aligned} (z-1)P(z) &= (z-1)\,(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4) \\ &= a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + a_3 z^4 + a_4 z^5 - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - a_4 z^4 \\ &= a_4 z^5 + (a_3 - a_4) z^4 + (a_2 - a_3) z^3 + (a_1 - a_2) z^2 + (a_0 - a_1) z - a_0 \end{aligned}$$

   Or :

$$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ z^5 - 1 = a_4 z^5 + (a_3 - a_4) z^4 + (a_2 - a_3) z^3 + (a_1 - a_2) z^2 + (a_0 - a_1) z - a_0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_4 = 1 \\ a_3 - a_4 = 0 \\ a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \\ -a_0 = -1 \end{cases}$$

   (par identification)

$$\Leftrightarrow\ a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 1$$

- Synthèse
  On pose $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 1$. Dès lors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :
  $$\begin{aligned}(z-1)\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4\right) &= (z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4) \\ &= z+z^2+z^3+z^4+z^5-(1+z+z^2+z^3+z^4) \\ &= z^5-1\end{aligned}$$
- Conclusion
  $$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe une unique 5-liste } (a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^5 \text{ telle que :} \\ \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ z^5-1 = (z-1)\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4\right) \\ \text{C'est } (a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) = (1,1,1,1,1)\ .\end{array}}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$.
$$\begin{aligned}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1 &= z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} - 1 \\ &= z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \\ &= \frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2} \\ &= \frac{P(z)}{z^2}\end{aligned}$$
$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^*\ ,\ \frac{P(z)}{z^2} = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1}$$

(c) On résout $Z^2+Z-1=0$.

$\Delta = 1+4 = 5$. Cette équation a donc deux solutions réelles qui sont : $Z_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } Z^2+Z-1=0 \text{ est } \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ ,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}\ .}$$

(d) Tout d'abord, on constate que $z=0$ n'est pas une racine de P.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
$$\begin{aligned}P(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1 = 0 \quad \text{(d'après 2b)} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} z+\dfrac{1}{z} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ z+\dfrac{1}{z} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right. \quad \text{(d'après 2c)}\end{aligned}$$

On résout à part :

- Première équation
  $$z+\frac{1}{z} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad z^2+1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}z \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$$
  Pour cette équation, $\Delta = \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}$. On voit que $\Delta < 0$.
  Cette équation a donc exactement deux solutions, qui sont :
  $z_3 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\,\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ et $z_4 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\,\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

- <u>Deuxième équation</u>

  $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad z^2+1=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}z \quad\Leftrightarrow\quad z^2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}z+1=0$

  Pour cette équation, $\Delta=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-4=\dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-4=\dfrac{-10+2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}<0.$

  Cette équation a donc exactement deux solutions, qui sont :

  $z_1=\dfrac{1}{2}\Big(-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}\Big) \;=\; -\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ et $z_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'ensemble des solutions de } \mathsf{P}(z)=0 \text{ est :}\\ \left\{-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\ ,\ -\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\ ,\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\ ,\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right\}\end{array}}$$

3. D'après la question 2a, on sait que : z est une racine 5-ième de l'unité si et seulement si $z=1$ ou $\mathsf{P}(z)=0$.
   Les racines 5-ièmes de l'unité non réelles sont donc exactement les solutions de l'équation $\mathsf{P}(z)=0$ trouvées à la question 2d. Il reste donc à savoir laquelle est laquelle. Pour cela, on utilise l'unicité de l'écriture algébrique d'un complexe.

   D'après le cercle trigonométrique, on sait que : $-\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)<0<\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

   Comme $-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}<0<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$, on en déduit que $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$.

   De plus, d'après le cercle trigonométrique, on sait que : $-\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)<-\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)<0<\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)<\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

   Comme $-\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}<-\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}<0<\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}<\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, on en déduit que $\boxed{\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$
   .