Géométrie

Exercice 1 (Correction complète)

- Equation cartésienne - Méthode 1 - Avec un système
  d est une droite du plan donc d a une équation de la forme $ax+by+c=0$ où a, b et c sont des réels à déterminer.

  Pour déterminer a, b et c, on résout :

  $$\left\{\begin{array}{l} A \in d \\ B \in d \end{array}\right.$$

  $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ -5a & + & 3b & + & c & = & 0 \end{array}\right.$$

  $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} a & + & 2b & + & c & = & 0 & \\ -6a & + & b & & & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right.$$

  $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccl} c & = & -a-2b=-13a \\ b & = & 6a \end{array}\right.$$

  En prenant $a=1$, on obtient : $\boxed{d \text{ a pour équation } x+6y-13=0}$

- Remarque sur la méthode 1
  Il est normal de trouver un système avec une infinité de solutions. Si on prenait par exemple $a=2$, on obtiendrait aussi une équation de d, qui serait $2x+12y-26=0$.
  De même, pour $a=-1$, on obtiendrait $-x-6y+13=0$, qui est aussi une équation de d.
  N'importe quelle valeur de a différente de 0 fournit une équation de d.

- Equation cartésienne - Méthode 2 - Avec un déterminant
  Soit $M(x,y)$ un point du plan.
  On sait que $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  $M \in d$
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires
  $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)=0$
  $\Leftrightarrow (x-1)\times 1-(y-2)\times(-6)=0$
  $\Leftrightarrow x+6y-13=0$

  Ceci prouve que $\boxed{d \text{ a pour équation } x+6y-13=0}$

- Système d'équations paramétriques
  d passe par $A(1,2)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Donc $\boxed{d \text{ a pour système d'équations paramétriques } \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1 & - & 6t \\ y & = & 2 & + & t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}}$

Exercice 2 (Correction complète)

- Equation cartésienne - Avec un vecteur normal

  On sait que d a pour vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$

  Donc d a une équation de la forme $-7x + 4y + c = 0$ où c est un réel à déterminer.

  De plus, $A(1, 2) \in d$ donc $-7 \times 1 + 4 \times 2 + c = 0$, d'où $c = -1$.

  $\boxed{d \text{ a pour équation } -7x + 4y - 1 = 0}$

- Système d'équations paramétriques

  d passe par le point $A(1, 2)$.

  De plus, d a pour vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

  Donc $\boxed{d \text{ a pour système d'équations paramétriques } \left\{ \begin{array}{lllll} x & = & 1 & + & 4t \\ y & = & 2 & + & 7t \end{array} \right. \quad , \quad t \in \mathbb{R}}$

- Remarque - Comment déterminer un vecteur directeur ?

  Connaissant un vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$, on peut déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de plusieurs façons.

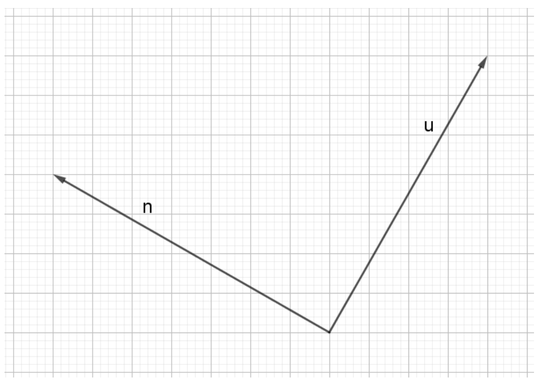
  → Méthode 1 - numériquement

  On note $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$.

  On sait que $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, donc $-7x_u + 4y_u = 0$, c'est-à-dire $7x_u = 4y_u$.

  On voit que $x_u = 4$ et $y_u = 7$ conviennent.

  → Méthode 2 - avec un dessin



  Comme pour $\overrightarrow{n}$, on "recule de 7 et on monte de 4", on voit que pour avoir un angle droite il faut "avancer de 4 et monter de 7" .

  Donc $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ convient.

  → Dans un cas comme dans l'autre

  On considère que, quelle que soit la méthode utilisée, le raisonnement se fait instantanément et de tête, et on peut juste "balancer" un vecteur directeur.

Exercice 3 (dans les grandes lignes)

Par lecture du système d'équations paramétriques, on sait que d passe par le point $A(2,3)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- <u>Méthode 1 - Avec un système</u>
  Méthode détaillée dans l'exercice 1.
  d passe par $A(2,3)$ (obtenue pour $t=0$) et par $B(3,2)$ (obtenu pour $t=1$).
  On peut donc poser une équation a priori de d et obtenir les coefficients en résolvant un système.

- <u>Méthode 2 - Avec un déterminant</u>
  Méthode détaillée dans l'exercice 1.
  On prend $M(x,y)$ un point quelconque et on traduit par équivalences successives le fait que $M \in d$.

- <u>Méthode 3 - Avec un vecteur normal</u>
  d est dirigée par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc d a pour vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  Ensuite, c'est la méthode détaillée dans l'exercice 2.

- <u>Dans tous les cas</u>
  $\boxed{d \text{ a pour équation } x+y-5=0}$

Exercice 4

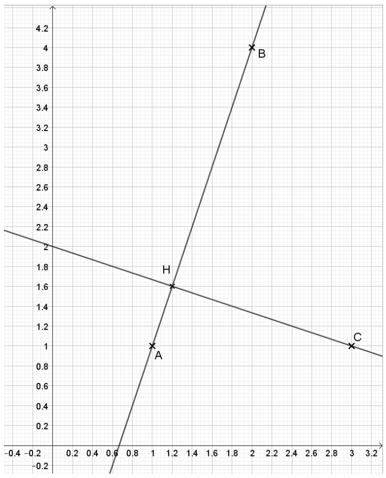
Fait en classe.

Exercice 5 (Correction très rapide)

d_1 et d_2 sont sécantes en $M(-1,1)$ et sont perpendiculaires.

Exercice 6 (Correction complète)

On note H le projeté orthogonal de C sur (AB) et on commence par faire une figure :



Cette figure permettra de contrôler le caractère plausible des résultats obtenus.

- Méthode 1 - En appliquant directement la formule du cours

D'après la formule du cours, on sait que : $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB}}{\|\,\overrightarrow{AB}\,\|^2}\overrightarrow{AB}$

Or : $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AH} = \dfrac{2}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$

Enfin, comme $A(1,1)$, on en déduit que $H(\dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{5})$.

$\boxed{\text{Les coordonnées du projeté orthogonal de } C \text{ sur } (AB) \text{ sont } (\dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{5})\ .}$

- Méthode 2 - En retrouvant la formule du cours

On note (x, y) les coordonnées de H. On détermine (x, y) en résolvant : $\begin{cases} H \in (AB) \\ \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$

Or : $\overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} 3-x \\ 1-y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = (3-x)+3(1-y) = -x-3y+6$ et (AB) a pour équation $y = 3x-2$.

On résout donc :

$$\begin{cases} -3x & + & y & = & -2 \\ x & + & 3y & = & 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x & + & y & = & -2 & \\ & & 10y & = & 16 & L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{5} \\ \\ y = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Les coordonnées du projeté orthogonal de } C \text{ sur } (AB) \text{ sont } (\dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{5})\ .}$

Exercice 7 (Correction très rapide)

Pour déterminer les coordonnées de H, on utilise l'une des méthodes de l'exercice 6. On trouve $\mathsf{H}(\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$.

La distance de M à Δ est $\mathsf{MH} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Exercice 8 (Correction complète)

1. On transforme :

$$\begin{array}{ll} & x^2 - 2x + y^2 + 2y + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 + (y+1)^2 = -1 \end{array}$$

Donc $\boxed{C_1 = \emptyset}$.

2. On transforme :

$$\begin{array}{ll} & x^2 - 4x + y^2 + y + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \end{array}$$

Donc $\boxed{C_2 \text{ est le cercle de centre } \Omega\left(2, -\frac{1}{2}\right) \text{ et de rayon } \frac{3}{2}}$.

Exercice 9 (Correction complète)

1. On transforme l'équation de C :

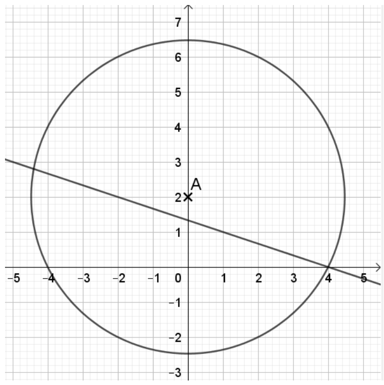
   $x^2 + y^2 - 4y - 16 = 0$

   $\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 - 4 - 16 = 0$

   $\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 = 20$

   Ceci prouve que $\boxed{C \text{ est le cercle de centre } \Omega(0,2) \text{ et de rayon } r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ .}$

2. *Au moins un brouillon, on fait une figure. Celle-ci servira à contrôler nos résultats.*



   Chercher l'intersection de d et C revient à résoudre le système :

   $$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4y - 16 = 0 \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3y \\ (4-3y)^2 + y^2 - 4y - 16 = 0 \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3y \\ 10y^2 - 28y = 0 \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3y \\ y\,(5y - 14) = 0 \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} (y = 0 \text{ et } x = 4) \\ \text{ou} \\ (y = \dfrac{14}{5} \text{ et } x = -\dfrac{22}{5}) \end{cases}$$

   $$\boxed{d \text{ et } C \text{ ont exactement deux points d'intersection, qui sont les points de coordonnées } (\,4, 0\,) \text{ et } (-\dfrac{22}{5}, \dfrac{14}{5}\,).}$$

Exercice 10 (Correction dans les grandes lignes)

1. C est le cercle de centre $\Omega(1,2)$ et de rayon 2.
2.
   - Analyse
     Soit d une tangente à C passant par A. On note M le point d'intersection de C et d. On sait que :
     $\begin{cases} M \in C \\ \overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{\Omega M} = 0 \end{cases}$
     On résout ce système ; on trouve deux solutions. Pour l'une, $x = 1$ et $y = 0$ et pour l'autre $x = -1$ et $y = 2$.
   - Synthèse
     Ca marche
   - Remarque
     Ne pas oublier de confirmer par un dessin !

Exercice 11 (Correction dans les grandes lignes)

- Méthode 1 - A partir de l'équation cartésienne
  $x - 2y - 3z - 4 = 0$
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu + 4 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$
- Méthode 2 - Avec des points
  On détermine trois points A, B et C appartenant à P de sorte que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne soient pas colinéaires et on écrit un système d'équations paramétriques à partir de là.

Exercice 12 (Correction dans les grandes lignes)

1.
   - Méthode 1 - Avec des vecteurs normaux
     On détermine $\overrightarrow{n_1}$ un vecteur normal à P_1 et $\overrightarrow{n_2}$ un vecteur normal à P_2.
     On vérifie que $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires.
   - Méthode 2 - Avec un système
     On détermine l'intersection de P_1 et P_2 en résolvant un système. Comme ce système a des solutions, les plans sont sécants.
     On remarque que, pour cette question, il n'est pas nécessaire d'expliciter ces solutions ; il suffit qu'elles existent.
2. On transforme :
   $$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$
   $\Leftrightarrow \dots$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 2 \\ z = y + 1 \end{cases}$$
   - Méthode 1 - Avec des points
     A partir de là, on peut déterminer deux points A et B appartenant à d et procéder en écrivant d comme passant par A et étant dirigée par $\overrightarrow{AB}$.
   - Méthode 2 - En finissant avec le système
     $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 2 \\ z = y + 1 \end{cases}$$
     $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t - 2 \\ y = t + 0 \\ z = t + 1 \end{cases}$$

Exercice 13 (Correction complète)

1. Les points A, B et C définissent un plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
   Or : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   Si ces deux vecteurs étaient colinéaires, à cause des premières coordonnées, on aurait $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, ce qui est faut.
   Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
   Donc $\boxed{\text{les points } A,\ B \text{ et } C \text{ définissent un plan}}$.

2. Le plan (ABC) passe par le point $A(0,3,-1)$ et est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (qui ne sont pas colinéaires) .
   Donc $\boxed{(ABC) \text{ a pour système d'équations paramétriques } \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & & + & t & + & t' \\ y & = & 3 & - & 2t & - & 4t' \\ z & = & -1 & + & t & + & 3t' \end{array} \right. \quad , \quad t,t' \in \mathbb{R}}$

3. • Méthode 1 - Avec un vecteur normal
   On note $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à (ABC).
   On déterminer a, b et c en résolvant :
   $$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{array} \right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} a & - & 2b & + & c & = & 0 \\ a & - & 4b & + & 3c & = & 0 \end{array} \right.$$
   $$\Leftrightarrow \dots$$
   $$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & c \\ b & = & c \end{array} \right.$$
   On peut donc prendre $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Ainsi, (ABC) a une équation de la forme $x + y + z + d = 0$ où d reste à déterminer.
   Comme $A \in (ABC)$, on a $0 + 3 - 1 + d = 0$, d'où $d = -2$.

   $\boxed{(ABC) \text{ a pour équation } x + y + z - 2 = 0}$

   • Méthode 2 - Avec un système
   (ABC) est un plan donc a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des réels à déterminer.

Pour les déterminer, on résout :

$$\begin{cases} A \in (ABC) \\ B \in (ABC) \\ C \in (ABC) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} & & 3b & - & c & + & d & = & 0 \\ a & + & b & & & + & d & = & 0 \\ a & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \dots$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = & b \\ c & = & b \\ d & = & -2b \end{cases}$$

En prenant $b = 1$, on obtient $\boxed{(ABC) \text{ a pour équation } x + y + z - 2 = 0}$

- <u>Méthode 3 - En éliminant t et t'</u>

  On transforme :

$$\begin{cases} x & = & & + & t & + & t' \\ y & = & 3 & - & 2t & - & 4t' \\ z & = & -1 & + & t & + & 3t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = & & + & t & + & t' & \\ 2x + y & = & 3 & & & - & 2t' & L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ z - x & = & -1 & & & + & 2t' & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = & & + & t & + & t' & \\ 2x + y & = & 3 & & & - & 2t' & \\ (2x + y) + (z - x) & = & 2 & & & & & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

La dernière ligne fournit une équation cartésienne de (ABC).

Ainsi, $\boxed{(ABC) \text{ a pour équation } x + y + z = 2}$.

Exercice 14 (Dans les grandes lignes)

1. On trouve :
$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & t \\ y & = & 2 & - & t \\ z & = & 3 & + & 2t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}$$
2. L'idée générale est :
   - On déterminer un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{u}$, en choisissant des valeurs.
     Par exemple, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{u}$.
   - On définit P le plan passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. P est alors un plan contenant la droite d.
   - On détermine une équation cartésienne de P. Ici, on trouve $x - y - z = -4$.
3. d est alors l'intersection des deux plans trouvés à la question précédente.

Exercice 15 (Dans les grandes lignes)

1. Il suffit de vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, et ils ne le sont pas.
2.
   - Méthode 1 - Avec les formules du cours
     On peut utiliser les méthodes du cours mais attention : dans le cours, on a pris des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ orthogonaux et ici $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne le sont pas.
   - Méthode 2 - En résolvant un système
     On note H le projeté en question et on résout :
     $$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{DH}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{DH}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0 \\ H \in (ABC) \end{array}\right.$$
   - Méthode 3 - En résolvant un autre système
     On note $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à (ABC) et d la droite passant par D et dirigée par $\overrightarrow{n}$. On a donc une représentation paramétrique de d
     On note H le projeté en question et on résout :
     $$\left\{\begin{array}{l} H \in (ABC) \\ H \in d \end{array}\right.$$

Exercice 16 (Correction complète)

1. *Pour cette question, on peut utiliser les trois mêmes méthodes que dans l'exercice 13.*

- Méthode 1 - Avec un vecteur normal

  Par lecture du système d'équations paramétriques, on voit que P est dirigé par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, qui ne sont pas colinéaires. On note $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à P.

  On détermine a, b et c en résolvant :
  $$\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ a - b + 2c = 0 \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ 3a + c = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} b = c - 2a = -5a \\ c = -3a \end{cases}$$

  On peut donc prendre $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

  Ainsi, P a une équation de la forme $x - 5y - 3z + d = 0$ où d reste à déterminer.
  Comme $B(3, -1, 1) \in P$, on a $3 + 5 - 3 + d = 0$, d'où $d = -5$.
  $\boxed{P \text{ a pour équation } x - 5y - 3z - 5 = 0.}$

- Méthode 2 - En revenant à un système
  Pour $\lambda = \mu = 0$, on obtient que le point $B(3, -1, 1)$ appartient à P.
  Pour $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, on obtient que le point $C(5, 0, 0)$ appartient à P.
  Pour $\lambda = 0$ et $\mu = 1$, on obtient que le point $D(4, -2, 3)$ appartient à P.

  Par ailleurs, P est un plan donc a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des réels à déterminer.

  Pour les déterminer, on résout :

  $$\begin{cases} B \in P \\ C \in P \\ D \in P \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + c + d = 0 \\ 5a + d = 0 \\ 4a - 2b + 3c + d = 0 \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + c + d = 0 \\ 2a + b - c = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ a - b + 2c = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + c + d = 0 \\ 2a + b - c = 0 \\ 3a + c = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} d = -3a + b - c = -5a \\ b = c - 2a = -5a \\ c = -3a \end{cases}$$

  En prenant $a = 1$, on obtient : $\boxed{P \text{ a pour équation } x - 5y - 3z - 5 = 0}$.

- <u>Méthode 3 - En éliminant λ et μ</u>
  On transforme :
  $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 2\lambda & + & \mu & + & 3 \\ y & = & \lambda & - & \mu & - & 1 \\ z & = & -\lambda & + & 2\mu & + & 1 \end{array}\right.$$
  $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccrcrcrl} x & = & 2\lambda & + & \mu & + & 3 & \\ x+y & = & 3\lambda & & & + & 2 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2x-z & = & 5\lambda & & & + & 5 & L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{array}\right.$$
  $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccrcrcrl} x & = & 2\lambda & + & \mu & + & 3 & \\ x+y & = & 3\lambda & & & + & 2 & \\ 5(x+y)-3(2x-z) & = & & & & - & 5 & L_3 \leftarrow 5L_2 - 3L_3 \end{array}\right.$$
  La dernière ligne fournit une équation cartésienne de P.
  Ainsi, $\boxed{P \text{ a pour équation } -x+5y+3z=-5.}$

2. *Pour cette question, on peut utiliser les deux mêmes méthodes que dans l'exercice 6. Je rédige ici sans utiliser la formule du cours.*

   On note d la droite passant par $A(-1,4,3)$ et dirigée par $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ (vecteur normal à P).

   d a pour système d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & = & -1 & - & t & , & t \in \mathbb{R} \\ y & = & 4 & + & 5t & & \\ z & = & 3 & + & 3t & & \end{array}\right.$

   On note $H(x,y,z)$ le projeté orthogonal de A sur P. On déterminer ses coordonnées en résolvant :
   $$\left\{\begin{array}{l} H \in P \\ H \in d \end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+5y+3z+5=0 \\ x=-1-t \\ y=4+5t \\ z=3+3t \end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -(-1-t)+5(4+5t)+3(3+3t)+5=0 \\ x=-1-t \\ y=4+5t \\ z=3+3t \end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} t & = & -1 \\ x & = & 0 \\ y & = & -1 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$
   $\boxed{\text{Le projeté orthogonal de } A \text{ sur } P \text{ a pour coordonnées } (0,-1,0).}$

Exercice 17 (Grandes lignes)

1. P_1 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   P_1' a donc une équation de la forme $x + y + z + d = 0$.
   On déterminer d parce qu'on sait que $A \in P_1'$.
   On trouve : $\boxed{P_1' \ : \ x + y + z - 6 = 0}$
   Pour déterminer la distance de A à P_1, on commence par noter H le projeté orthogonal de A sur P_1. La question revient alors à déterminer la longueur AH.
   On déterminer les coordonnées de H par la méthode de son choix et on trouve $H(0, 1, 2)$.
   Il vient : $\boxed{\text{la distance de } A \text{ à } P_1 \text{ vaut } \sqrt{3}}$.
2. On transforme :
   $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ y = y \\ z = -3y + 4 \end{cases}$

   $\boxed{\text{Une représentation paramétrique de } \Delta \text{ est } \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = -3t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$
3. Δ' est dirigée par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, qui est compatible avec le fait d'être incluse dans P_1.

   De plus, Δ' passe par B le point d'intersection de d et P_1 ; par résolution d'un système on trouve $B(2, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2})$.

   $\boxed{\text{Une représentation paramétrique de } \Delta \text{ est } \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t + \frac{3}{2} \\ z = -3t - \frac{1}{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$

Exercice 18

Avant toute chose, l'énoncé sous-entend que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes. En effet, si elles ne sont pas sécantes, elles ne pourront pas être concourantes avec Δ.

Or, $\mathcal{D}_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t \quad , \quad t\in\mathbb{R} \\ y &=& t \\ z &=& 1+t \end{array}\right.$ et $\mathcal{D}_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t' \quad , \quad t'\in\mathbb{R} \\ y &=& 1 \\ z &=& 2 \end{array}\right.$

On résout :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1-t &=& t' \\ t &=& 1 \\ 1+t &=& 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t &=& 1 \\ t' &=& 0 \end{array}\right.$$

Ceci prouve que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en $M(0,1,2)$.

- Analyse

  On suppose qu'il existe Δ une droite qui soit perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et telle que Δ, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soient concourantes.
  On sait que Δ passe par $M(0,1,2)$, qui est le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

  De plus, on note $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de Δ.

  Δ est perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ donc $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u_1} = 0$.
  Δ est perpendiculaire à $\mathcal{D}_2$ donc $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u_2} = 0$.

  Pour déterminer a, b et c, on résout :

  $$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u_2} = 0 \end{array}\right.$$

  $$\left\{\begin{array}{rcl} -a+b+c &=& 0 \\ a &=& 0 \end{array}\right.$$

  $$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& -c \end{array}\right.$$

  En prenant $b = 1$, on soit qu'on peut prendre $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

  Finalement, Δ est la droite qui passe par $M(0,1,2)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Synthèse

  On pose Δ la droite qui passe par $M(0,1,2)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et on vérifie qu'elle convient :

  → Δ est une droite.
  → Δ, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont concourantes en $M(0,1,2)$.
  → $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u_1} = 0$ donc Δ est perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$
  → $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u_2} = 0$ donc Δ est perpendiculaire à $\mathcal{D}_2$

- Conclusion

  Il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et telle que Δ, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soient concourantes ; c'est la droite qui passe par $M(0,1,2)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 19 (Grandes lignes)

1. (d_λ) est définie comme l'intersection du plan P_1 de vecteur normal $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et du plan P_2 de vecteur normal $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$
   Si $\lambda = 1$, (d_1) est un plan.
   Si $\lambda \neq 1$, (d_λ) est une droite.
2. On résout le système :
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ x & + & y & + & \lambda z & = & \lambda^2 \end{array}\right.$$
   Si $\lambda = 1$, on trouve $P_1 = P_2 = P_\lambda$ et donc l'intersection est égale à chacun de ces plans.
   Si $\lambda = -2$, l'intersection est vide.
   Sinon, l'intersection est un point.