Exercice 4

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

La suite (v_n) est appelée *série harmonique*.

1. Démontrer que, pour tout $x \in]-1\,,\,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
2. (a) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leqslant v_n$.
   (c) En déduire la limite de la suite (v_n) .
3. (a) Justifier que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 : $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \ln(n) + 1$.
   (c) Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
4. (a) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = v_n - \ln(n)$.
   On note, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $b_n = v_{n-1} - \ln(n)$.
   Montrer que les suite (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
   (b) En déduire que la suite $(v_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   La valeur de sa limite est appelée la constante d'Euler ; on ne cherchera pas à la calculer.

Exercice 5

On définit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

1. On définit la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ où x désigne un réel.
   Etudier les variations de f sur son ensemble de définition.
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $1 \leqslant u_n$.
3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
4. Vérifier que la suite (u_n) admet une limite et la déterminer.