DS n°5 - Correction

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \quad \text{(possible car } \sqrt{n+1}+\sqrt{n}\neq 0\text{)}\\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.}$$

2. Monotonie de (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= S_{n+1}-2\sqrt{n+1}-S_n+2\sqrt{n}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\\ &= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\end{aligned}$$

Par croissance de la fonction racine sur son ensemble de définition, $\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1}$. Donc $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$.

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

Monotonie de (v_n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_{n+1}-v_n = \ldots = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \ldots = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} \geqslant 0$$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est croissante}}$.

3. Limite de la différence

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n-v_n = 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-v_n = 0$

Conclusion

En combinant ce résultat avec ceux de la question 2, on en déduit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

D'après le théorème des suites adjacentes, $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers un même réel}}$.

4. • Première inégalité
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On sait que (u_n) est décroissante et que (u_n) converge vers L . Donc :

$$L \leqslant u_n$$

$$\Leftrightarrow \quad L \leqslant S_n - 2\sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad S_n \leqslant L + 2\sqrt{n} \leqslant S_n$$

De plus, (v_n) est croissante et converge vers L . Donc, de même : $S_n \leqslant 2\sqrt{n+1} + L$.

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ L + 2\sqrt{n} \leqslant S_n \leqslant L + 2\sqrt{n+1}}$

5. $\lim\limits_{n \to +\infty} L + 2\sqrt{n} = +\infty$. Donc, par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$L + 2\sqrt{n} \quad \leqslant \quad S_n \quad \leqslant \quad L + 2\sqrt{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{L + 2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \quad \leqslant \quad \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \quad \leqslant \quad \frac{L + 2\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{L}{2\sqrt{n}} + 1 \quad \leqslant \quad \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \quad \leqslant \quad \frac{L}{2\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$$

Or :

→ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{L}{2\sqrt{n}} = 0$

→ $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1$

Donc, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$.

Enfin, $\boxed{S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$

Exercice 2

1. On rappelle tout d'abord que, pour $a \in]0\,,\,+\infty\,[$ et $b \in \mathbb{R}$, $a^b = e^{b\ln(a)}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $f(x)$ existe $\quad\Leftrightarrow\quad x \neq 1$ et $\dfrac{x}{x-1} > 0$ et $x \neq 0$ et $\dfrac{x+1}{x} > 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\dfrac{x}{x-1}$		$+$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$\dfrac{x+1}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$		$+$	

   $\boxed{f \text{ est définie sur } D =]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.}$

2. Tout d'abord, D est symétrique par rapport à 0.
   Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \left(\frac{-x}{-x-1}\right)^{-x-1} - \left(\frac{-x+1}{-x}\right)^{-x+1} \\
&= \left(\frac{-(x+1)}{-x}\right)^{x+1} - \left(\frac{-x}{-(x-1)}\right)^{x-1} \\
&= \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1} - \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} \\
&= -f(x)
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

3. • <u>En 1^+</u>

   → $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1} = 2^2 = 4$

   → Soit x au voisinage de 1^+.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} &= \exp\left[(x-1)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right] \\
&= \exp\left[(x-1)\Big(\ln(x) - \ln(x-1)\Big)\right] \qquad \text{(possible pour } x \text{ au voisinage de } 1^+\text{)} \\
&= \exp\left[x\ln(x) - \ln(x) - (x-1)\ln(x-1)\right]
\end{aligned}$$

   Or :
   $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} x\ln(x) = 0$
   $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} -\ln(x) = 0$
   $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (x-1)\ln(x-1) = \lim_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0$ (par croissance comparée)

   Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} = e^0 = 1$

   $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = -3.}$

   • <u>En -1</u>

   Par imparité, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = 3}$.

4. • <u>En $+\infty$</u>

→ Soit x au voisinage de $+\infty$.

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1} = \exp\left[(x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right] = \exp\left[(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

Or : $(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x}$ donc $(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

D'où, par composition des limites, $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e$

→ Soit x au voisinage de $+\infty$.

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} = \exp\left[(x-1)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right] = \exp\left[(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\right]$$

Or : $(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} (x-1) \times \frac{1}{x-1}$ donc $(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

D'où, par composition des limites, $\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e$

→ Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e - e$, c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

• <u>En $-\infty$</u>

Par imparité, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

Exercice 3

1. (a)
   - Ensemble de définition : f est définie sur $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
   - Dérivée et variations

     Par les théorèmes de dérivabilité, f est dérivable sur D.

     Soit $x \in D$.

$$f'(x) = \frac{4x(x+1) - 2x^2 \times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2} = \frac{2x\left(x+2\right)}{(x+1)^2}$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-8	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

   - Limites en l'infini

     $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{2x^2}{x}$, c'est-à-dire $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} 2x$ donc $\boxed{f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty}$.

     De même, $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.
   - Limites en -1

     $\lim\limits_{x\to-1} 2x^2 = 2$

     De plus, $\lim\limits_{x\to-1^-} x+1 = 0^-$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty}$.

     Enfin, $\lim\limits_{x\to-1^+} x+1 = 0^+$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty}$.

   (b) Soit $x \in D$. On résout :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x+1} = x \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } f(x) = x \text{ est } \{0,1\} .}$

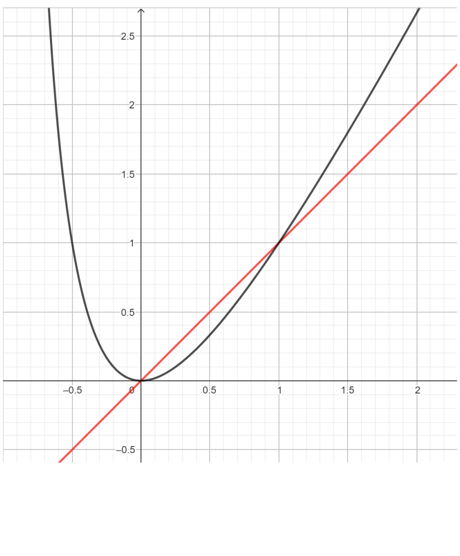
Soit $x \in D$. On calcule :

$$f(x) - x = \frac{2x^2}{x+1} - x = \frac{2x^2 - x(x+1)}{x+1} = \frac{x^2-x}{x+1} = \frac{x(x-1)}{x+1}$$

On conclut en dressant un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)-x$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

   (c) On propose :



2. (a) A l'aide du graphique, on conjecture que :
$\boxed{\text{Si } a = \frac{3}{5}, \text{ alors } (u_n) \text{ est strictement décroissante et converge vers } 0}$.

(b) On raisonne par récurrence.

- Initialisation : pour $n = 0$
$u_0 = \frac{3}{5} = 0,6$.
Donc $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{2 \times \frac{9}{25}}{\frac{3}{5}+1} = \frac{18}{25} \times \frac{5}{8} = \frac{9}{20} = 0,45$
On a donc bien $0 < u_1 < u_0 < 1$.
- Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_{n+1} < u_n < 1$.
La fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$, donc on a : $f(0) < f(u_{n+1}) < f(u_n) < f(1)$.
C'est-à-dire : $0 < u_{n+2} < u_{n+1} < 1$.
- Conclusion
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} < u_n < 1 .}$

(c) On a prouvé que (u_n) est décroissante et minorée.
Donc, d'après le théorème de limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ admet une limite}}$ et cette limite est un réel noté L.
Nécessairement, L vérifie $L = f(L)$. Donc, d'après la question 1b, $L = 0$ ou $L = 1$.
Comme (u_n) est décroissante et $u_0 = \frac{3}{5} < 1$, $L = 1$ est impossible.
Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$.

3. On raisonne par récurrence pour démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
- Initialisation : pour $n = 0$
$u_0 = 1$ donc la propriété est initialisée.
- Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1$.
Dès lors, $u_{n+1} = f(u_n) = f(1) = 1$
- Conclusion
Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
Donc $\boxed{(u_n) \text{ est constante}}$.

4. (a) A l'aide du graphique de la question 1c, on conjecture que :
$\boxed{\text{Si } a > 1, \text{ alors } (u_n) \text{ est strictement croissante et diverge vers } +\infty.}$

(b) On raisonne par récurrence :

- Initialisation : pour $n = 0$.
$u_0 = a > 1$.
Or, pour tout $x \in]1, +\infty[$, d'après le tableau de la question 2b, $f(x) - x > 0$.
Ainsi, $f(a) - a > 0$, c'est-à-dire $f(u_0) - u_0 > 0$, c'est-à-dire $u_1 > u_0$.
La propriété est donc vraie au rang 1.
- Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} > u_n > 1$.
La fonction f est strictement croissant sur $]1, +\infty[$, donc on a : $f(u_{n+1}) > f(u_n) > f(1)$.
C'est-à-dire : $u_{n+2} > u_{n+1} > 1$.
- Conclusion
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n > 1.}$

(c) La question précédente prouve que la suite (u_n) est croissante.
Donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ admet une limite}}$.
De plus, toujours d'après le théorème de la limite monotone, cette limite est soit un réel soit $+\infty$.
On raisonne par l'absurde : on suppose que (u_n) converge un réel L.
Comme dans la question 2c, on a nécessairement $L = 0$ ou $L = 1$.
Or : d'après la question précédente, (u_n) est minorée par 1, donc $L = 0$ est impossible.
Par ailleurs, comme (u_n) est croissante et $u_0 = a > 1$, $L = 1$ est également impossible.
On a une contradiction.
Donc $\boxed{(u_n) \text{ a pour limite } +\infty}$.

Exercice 4

1. (a) $P_2(0) = a$. Or, a est le coefficient dominant de P_2, donc nécessairement $a \neq 0$.

   Donc 0 n'est pas racine de P_2.

   (b) On a P_2 sous forme développée et sous forme factorisée.

   $$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ ax^2 + bx + a = a(x - r_1)(x - r - 2)$$

   $$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} a & = & a \\ b & = & -a(r_1 + r_2) \\ a & = & ar_1r_2 \end{array}\right. \qquad \text{(par identifisation)}$$

   Donc, comme $a \neq 0$, la dernière ligne donne $r_1r_2 = 1$

   (c) On suppose dans cette question que $r_1 = r_2$.

   D'après la question précédente, on a donc $r_1^2 = 1$, d'où $r_1 = 1$ ou $r_1 = -1$.

   Si P_2 admet une racine double, alors cette racine vaut 1 ou -1.

   Les polynômes palindromes correspondant à ce cas sont $x \mapsto a\Big(x^2 + 2x + 1\Big)$ et $x \mapsto a\Big(x^2 - 2x + 1\Big)$ $(a \in \mathbb{R}^*)$.

   (d) On suppose dans cette question que $r_1 \neq r_2$. On raisonne ensuite par l'absurde.

   - Si l'une des racines de P_2 vaut 1, on peut supposer sans perte de généralité que c'est r_1.

     Si $r_1 = 1$, alors, comme $r_1r_2 = 1$, on obtient $r_2 = \dfrac{1}{r_1} = 1$. Donc en fait $r_2 = r_1$, ce qui est faux.
   - Si l'une des racines de P_2 vaut -1, on peut supposer sans perte de généralité que c'est r_1.

     Si $r_1 = -1$, on aboutit de même à $r_2 = -1$ et on a la même contradiction.

   Si P_2 n'admet pas de racine double, alors aucune de ses racines n'est égale à 1 ou à -1.

2. (a) On constate que $P_3(-1) = -a + b - b + a = 0$. Donc -1 est une racine évidente de P_3.

   -1 est racine de P donc il existe Q un polynôme réel tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x + 1)Q(x)$.

   On sait déjà que Q est de degré 2.

   Reste à prouver que Q est un polynôme palindrome.

   On note $Q : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec α, β, γ des réels et $\alpha \neq 0$.

   $$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x) = (x + 1)Q(x)$$

   $$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\ ax^3 + bx^2 + bx + a = (x + 1)\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)$$

   $$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\ ax^3 + bx^2 + bx + a = \alpha x^3 + (\alpha + \beta)x^2 + (\because + \gamma)x + \gamma$$

   $$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} a & = & \alpha \\ b & = & \alpha + \beta \\ b & = & \beta + \gamma \\ a & = & \gamma \end{array}\right. \qquad \text{(par identification)}$$

   Ainsi, $\alpha = \gamma$ ce qui prouve que Q est un polynôme palindrome.

   Il existe Q un polynôme palindrome de degré 2 tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_3(x) = (x + 1)Q(x)$.

   (b) D'après la factorisation de la question précédente, on sait que P_3 a trois racines (non nécessairement distinctes) : -1 et les deux racines de Q_3

   Or, Q_3 étant un palindrome de degré 2, on peut lui appliquer les résultats de la question 1.

   Conclusion :

   - Si Q_3 a deux racines distinctes r_1 et r_2, alors P_3 a trois racines distinctes qui sont -1, r_1 et r_2.
   - Si Q_3 admet 1 comme racine double, alors les racines de P_3 sont -1 (racine simple) et 1 (racine double).
   - Si Q_3 admet -1 comme racine double, alors P_3 admet uniquement -1 comme racine triple.

3. (a) $P(0) = a_0 = a_d \neq 0$ car c'est le coefficient dominant de P.

$\boxed{0 \text{ n'est pas racine de } P}$

(b) On suppose que d est impair. Dans ce cas, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $d = 2n+1$, et on a :

$$\begin{aligned}
P(-1) &= \sum_{k=0}^{2n+1} a_k(-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k(-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_{2n+1-k}(-1)^k && \text{(car P est un palindrome)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k + \sum_{j=0}^{n} a_j(-1)^{2n+1-j} && \text{(changement d'indice j=2n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k\Big((-1)^k + (-1)^{2n+1-k}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k\Big(1 + (-1)^{2n+1-2k}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k\Big(1-1\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Si } d \text{ est impair, } -1 \text{ est racine de } P}$.

(c) On note $r \in \mathbb{R}$ une racine de P. D'après la question 3a, $r \neq 0$ donc cela a du sens de calculer $\frac{1}{r}$.

On calcule :

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{r}\right) &= a_0 + a_1\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots + a_{d-1}\left(\frac{1}{r}\right)^{d-1} + a_d\left(\frac{1}{r}\right)^d \\
&= \frac{a_0 r^d + a_1 r^{d-1} + \cdots + a_{d-1} r + a_d}{r^d} \\
&= \frac{P(r)}{r^d} && \text{(car P est un palindrome)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Si } r \in \mathbb{R} \text{ est une racine de } P, \text{ alors } \frac{1}{r} \text{ aussi.}}$

(d) On suppose que r est une racine réelle de P de multiplicité au moins 2. r vérifie donc : $P(r) = P'(r) = 0$.

D'une part, d'après la question précédente, $\frac{1}{r}$ est aussi une racine de P.

On calcule maintenant :

$$\begin{aligned}
P'\left(\frac{1}{r}\right) &= \sum_{k=1}^{d} k a_k \left(\frac{1}{r}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{r^{d-1}} \sum_{k=1}^{d} k a_k r^{d-k} \\
&= \frac{1}{r^{d-1}} \sum_{k=1}^{d} k a_{d-k} r^{d-k} && \text{(P est un palindrome)} \\
&= \frac{1}{r^{d-1}} \sum_{j=0}^{d-1} (d-j) a_j r^j && \text{(changement d'indice } j = d-k\text{)} \\
&= \frac{1}{r^{d-1}}\left(\sum_{j=0}^{d-1} d a_j r^j\right) - \frac{1}{r^{d-1}}\left(\sum_{j=0}^{d-1} j a_j r^j\right) \\
&= \frac{d}{r^{d-1}}\left(\sum_{j=0}^{d-1} d a_j r^j\right) - \frac{1}{r^{d-2}}\left(\sum_{j=1}^{d-1} j a_j r^{j-1}\right) && \text{(juste une transformation d'écriture)} \\
&= \frac{d}{r^{d-1}}\Big(P(r) - a_d r^d\Big) - \frac{1}{r^{d-2}}\Big(P'(r) - d a_d r^{d-1}\Big) \\
&= -\frac{d a_d r^d}{rd-1} + \frac{d a_d r^{d-1}}{\alpha^{d-2}} && \text{(car } P(r) = P'(r) = 0\text{)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{r}$ est une racine de P de multiplicité au moins 2.

$\boxed{\text{Si } r \in \mathbb{R} \text{ est une racine de } P \text{ de multiplicité au moins 2, alors } \frac{1}{r} \text{ aussi.}}$