

Concepts de base des probabilités

Espace probabilisés

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé fini.

Soient A , B et C trois événements.

Démontrer que :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)) + P(A \cap B \cap C)$$

Il s'agit de la formule du crible pour trois événements.

Exercice 2

Le code d'une carte bancaire est formé de quatre chiffres compris entre 0 et 9 (inclus).

Donner la probabilité des événements suivants :

1. A : "le code est formé de 4 chiffres distincts"
2. B : "le code contient une paire et une seule"
3. C : "le code est formé de deux paires distinctes".

Exercice 3

On considère une classe de n étudiants. Pour chaque étudiant, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.

Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats pour n entier non nul quelconque et on fera les applications numériques pour $n = 38$ et pour $n = 40$.

1. Quelle est la probabilité que deux étudiants au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un étudiant ait la même date d'anniversaire que la prof de maths ?
3. Commenter les résultats précédents.

Exercice 4

On lance un dé équilibré à 6 face n fois ($n \in \mathbb{N}^*$ fixé).

1. (a) Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n , qui simule ces n lancers successifs et qui renvoie la liste des n résultats obtenus.
(b) Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n , qui simule ces n lancers successifs et qui renvoie **True** si on obtient au moins un 6 et **False** sinon.
(c) Proposer un script Python permettant d'estimer la probabilité d'obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins un 6 en n lancers.

Probabilités conditionnelles

Exercice 5

Une population de lapins comporte 45% de mâles et 55% de femelles. L'albinisme frappe 2,5% des mâles et 1,6% des femelles.

Quelle est la probabilité qu'un lapin albinos soit mâle ?

On donnera seulement une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 6

Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% si cette personne est malade. En revanche, on obtient un faux positif pour 0,2% des personnes saines.

Une personne est testée positive ; quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?

Exercice 7

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On tire une boule au hasard. Si cette boule est blanche, on la remet dedans et on remet une autre boule blanche en plus. Sinon, le jeu s'arrête.

Calculer la probabilité p_n que le jeu s'arrête avec le tirage de la $n^{\text{ème}}$ boule ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 8

Un fumeur décide d'arrêter de fumer.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note p_n la probabilité qu'il fume le $n^{\text{ème}}$ jour. Sa tentative commence le jour $n = 1$.

S'il a réussi à ne pas fumer un jour, il ne fume pas non plus le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

S'il fume un jour, il réussit à ne pas fumer le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer p_n en fonction de p_1 et de n .
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Exercice 9

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$). Dans l'urne n^{o} il y a k boules blanches et $n - k$ boules noires. On choisit au hasard une urne, puis on choisit au hasard une boule dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir utilisé l'urne n sachant qu'on a tiré une boule blanche ?

Exercice 10

Sur un navire, n marins ($n \in \mathbb{N}^*$) tirent à la courte paille. Vous êtes le $k^{\text{ème}}$ à tirer. Quelle est la probabilité que vous ayez la paille la plus courte ?

Indépendance

Exercice 11

On lance n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une dé à 6 faces équilibré. Quelle est la probabilité de n'avoir eu le premier 6 qu'au $n^{\text{ème}}$ lancer ?

Exercice 12

Un joueur joue à pile ou face. A chaque lancer, il a une probabilité de $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) de réussir à lancer la pièce de façon à ce qu'elle se stabilise sur la tranche. Le joueur décide de tenter sa chance n fois.

1. Calculer la probabilité p_n que le joueur réussisse au moins une fois, en n lancers, à stabiliser la pièce sur la tranche.
2. Que devient cette probabilité p_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 13

On tire deux cartes d'un jeu de 32 cartes, l'une après l'autre, avec remise. On définit les événements :

A : "la première carte est un coeur"

B : "la deuxième carte est un coeur"

C : "les deux cartes sont de couleur différentes"

Etudier l'indépendance des événements deux à deux ainsi que leur indépendance mutuelle.

Approfondissement

Exercice 14

Dans tout l'exercice, n désigne un élément quelconque de $\mathbb{N}^*$.

Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée qui donne Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. A commence. A gagne dès qu'il obtient Pile et le jeu s'arrête alors. B gagne dès qu'il obtient Face et le jeu s'arrête alors.

1. (a) Quelle est la probabilité pour que A gagne lors de son $n^{\text{ème}}$ lancer ?
(b) Quelle est la probabilité p_n pour que A gagne au maximum en n lancers ?
(c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.
2. Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête jamais ?
3. Quelle valeur faut-il donner à p pour que les deux joueurs aient tous deux les mêmes chances de gagner ?

Exercice 15

Vous participez à une jeu télévisé. On vous présente trois portes. Derrière l'une d'elle se trouve une voiture. Derrière les deux autres, une chèvre.

Vous choisissez une porte au hasard. Pour faire durer le suspense, le présentateur ouvre, en connaissance de cause, une porte derrière laquelle se trouve une chèvre. On vous laisse la possibilité de changer de porte. Que choisissez-vous ?

Entraînement DS

Exercice 16

On dispose de deux pièces indiscernables : l'une équilibrée et l'autre déséquilibrée qui donne "face" avec une probabilité $p > \frac{1}{2}$. On effectue une série de lancers en choisissant l'une des deux pièces avant chaque lancer. Le but de cet exercice est d'étudier plusieurs stratégies afin de trouver celle qui a la plus de chance d'obtenir "face" à chaque lancer.

Pour cela, on note pour chaque entier $n \geq 1$:

- E_n l'événement : "on choisit la pièce équilibrée au $n^{\text{ème}}$ lancer"
- F_n l'événement : "on obtient "face" au $n^{\text{ème}}$ lancer"

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $P(F_n)$ en fonction de p et $P(E_n)$.

2. Stratégie 1

A chaque lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable (par exemple en lançant une troisième pièce dont on sait qu'elle est équilibrée).

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $P(F_n) = \frac{2p+1}{4}$.

3. Stratégie 2

Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Si on obtient "face", on continue d'utiliser la même pièce pour tous les lancers suivants. Sinon, on utilise l'autre pièce pour tous les lancers suivants.

- (a) Donner l'expression de $P(F_1)$ sans justification.
- (b) Soit $n \geq 2$. Déterminer les probabilités conditionnelles $P(E_n|E_1)$ et $P(E_n|\bar{E}_1)$ puis en déduire $P(E_n)$.

- (c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, :

$$P(F_n) = \frac{4p^2 + 3}{8}$$

- (d) Comparer les stratégies 1 et 2.

4. Stratégie 3

Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Puis, à chaque lancer suivant, on utilise la même pièce que le lancer précédent si on a obtenu "face", sinon on change de pièce.

- (a) Donner les expressions de $P(F_1)$ et $P(F_2)$ sans justification.
- (b) Montrer qu'il existe $(a, b) \in]0, 1[\times \mathbb{R}$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$, $P(E_{n+1}) = aP(E_n) + b$.
- (c) En déduire une expression de $P(E_n)$ en fonction de a , b et $n \geq 1$.

- (d) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$P(F_n) = \frac{1}{3-2p} \left[1 - \left(\frac{2p-1}{2} \right)^{n+1} \right].$$

- (e) Comparer les stratégies 2 et 3.