

TD₁ Assertions mathématiques

Exercice 1 (✍)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et E un ensemble de nombres réels. Dans chaque situation, dire si les deux assertions ont la même signification ou non. Expliquer.

1. « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ » et « $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = 0$ ».
2. « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ » et « $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ ».
3. « Les éléments de E sont tous non nuls » et « Les éléments de E sont non tous nuls ».

Exercice 2 (✍)

Déterminer les négations des assertions suivantes :

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Tous les samedis, le soleil brille. 2. Tous les samedis où le soleil brille, les oiseaux chantent. 3. Tous les samedis, si le soleil brille, les oiseaux chantent. 4. Tous les samedis, le soleil brille et les oiseaux chantent. 5. Tous les samedis, le soleil brille ou les oi- | <p>seaux chantent.</p> <ol style="list-style-type: none"> 6. Il y a un DS au moins une fois par semaine. 7. Chaque semaine, s'il n'y a pas eu de DS, au moins 2 oiseaux chanteront le samedi. 8. Tous les ans, il y a des semaines où il n'y a pas de DS. 9. Certaines semaines, le soleil brille tous les jours. |
|---|---|

Exercice 3 (✍)

Compléter avec \implies , \iff , \impliedby :

$ABCD$ est un carré	$ABCD$ est un parallélogramme
$a > 1$	$\frac{1}{a} < 1$
$AB = AC$	ABC est isocèle
$\ln a = b$	$a = e^b$
$x > 2$	$x^2 > 4$
A, B et B, C alignés	A, B, C alignés
$x > 0$	$-x \leq 0$
f est continue	f est dérivable

Exercice 4 (✍)

Nier la phrase : Toutes les poules à plumes rousses se transformeront en Phoenix et survivront au réchauffement climatique.

Exercice 5 (✍)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes.

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. f n'est pas une fonction constante.
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur.
5. La fonction f présente un minimum.
6. f prend des valeurs arbitrairement grandes.
7. f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 6 (✍)

1. Quelle est la contraposée de « si un nombre entier est divisible par 6, alors il est pair » ?
2. Quelle est la contraposée de « si le triangle ABC est rectangle en B , alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ » ?
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la contraposée de l'implication

$$\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon \implies a = 0.$$

Exercice 7 (⌚)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . Traduire par une phrase en français les assertions quantifiées suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$
2. $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \implies x = 0$
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$

Exercice 8 (⌚)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . Exprimer la négation des assertions suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} / f(x) = y$
3. $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y) \implies x = y$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \implies x \leq 0$

Légende des exercices :

- ✍ Exercice d'application du cours, à savoir faire en priorité.
 - ♥ Exercice de synthèse.
 - ⌚ Exercice pour aller plus loin.
-