

TD₂ Nombres réels, (in)équations.**1 Résolution d'équations****Exercice 1** (✍)Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $2(3 - x) = 4 + 9(x - 2)$,
2. $(3x - 1)(2x + 3) = (5 - 3x)^2$,
3. $(4x + 1)^2 = (5x - 2)^2$,
4. $x^2 - 2\sqrt{2}x = -2$,
5. $9 - (5 - x)(3 - 2x) = 4x^2$,
6. $3x^2 + 5x + 13 = 5(x + 2)$.

Exercice 2 (✍)Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $9 - \frac{2x + 7}{3} = \frac{4x}{6} - \frac{1}{3}$,
2. $\frac{3x + 1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{3}x - 1 + 2x$,
3. $\frac{1}{1 - \frac{x}{x - 1}} + x = 0$,
4. $1 - \frac{1}{x} = \frac{4(x^2 - 2)}{x(4x + 8)}$,
5. $1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$,
6. $\frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x - 1} = 2 - x + x^2$.

Exercice 3 (♥)Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$,
2. $x^2 - \frac{5}{x^2} + 4 = 0$.

Exercice 4 (⌚)Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $3|2 - x| = 5$,
2. $2|x + 4| = 4x - 3$,
3. $|x - \sqrt{2}| = |4x - 1|$,
4. $|x^2 - 4x + 3| = x - 3$,
5. $(|x| + x)(|x| - x) = 1$.

Exercice 5 (♥)Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante, en précisant où celle-ci a un sens :

$$x + \sqrt{2x + 1} = 1.$$

Exercice 6 (♥)

1. Discuter, selon la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, l'existence de solutions réelles de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - (\alpha + 3)x + 3\alpha + 1 = 0.$$

2. Déterminer, en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions réelles de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - 2\beta x - \beta + 6 = 0.$$

2 Résolution d'inéquations**Exercice 7** (✍)Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R} en précisant à chaque fois l'ensemble sur lequel elles ont un sens :

1. $3x + 3 \leq -2x + 4$,
2. $\frac{4x - 3}{3x + 7} > 0$,
3. $\frac{4x - 3}{3x + 7} > 1$.

Exercice 8 (✍)Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R} en précisant à chaque fois l'ensemble sur lequel elles ont un sens :

1. $x^2 - 3x + 7 \geq -\frac{3}{2}$,

2. $\frac{3}{4-x} + \frac{1}{4+x} \leq \frac{5}{16-x^2}$,

3. $\sqrt{x-5} > \sqrt{2x-1}$,

4. $\sqrt{2x-1} \leq \sqrt{x+1} + 1$.

Exercice 9 (♥)Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1. $|3x+1| \geq |x+2|$,

2. $|x-2| + |x^2+x-6| \leq 3|x-2|$.

3 Pour aller plus loin ⌚**Exercice 10 (♥)**Soient a et b deux réels. Montrer que

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Exercice 111. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \in \mathbb{Z} \iff x = \lfloor x \rfloor$.**Exercice 12**Soit $n, m \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n.$$

Exercice 13Soit A le sous-ensemble de \mathbb{R} défini par

$$A = \left\{ \frac{x^2+3}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Discuter de l'existence et déterminer la valeur, s'ils existent, de $\max(A)$, $\sup(A)$, $\min(A)$, $\inf(A)$.**Exercice 14**Soit P le polynôme défini sur \mathbb{R} par

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 23x - 60.$$

On cherche l'ensemble des racines de P .1. Montrer que 5 est une racine de P .2. On admet à ce stade de l'année que l'on peut factoriser l'expression définissant P par $x-5$. Trouver trois réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = (x-5)(ax^2 + bx + c).$$

3. En déduire l'ensemble des racines de P .**Légende des exercices :**

- 🗡 Exercice d'application du cours, à savoir faire en priorité.
- ♥ Exercice de synthèse / typique du chapitre.
- ⌚ Exercice pour aller plus loin.