

## DS 1 – Mathématiques

Mercredi 20 Septembre 2023

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice d'informatique et de cinq exercices de mathématiques.

**Exercice 1 (Informatique).** 1. Écrire une fonction Python  $f$  qui prend en argument un nombre réel  $x$  et qui renvoie

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{1 + x^2}.$$

Écrire une instruction qui permet d'affecter à une variable `resultat` la valeur  $f(10)$ .

2. Écrire une fonction Python  $g$  qui prend en argument un nombre entier  $n$  et qui renvoie

$$\begin{cases} 2n + 1 & \text{si } n < 10, \\ 3n + 2 & \text{si } n \geq 10 \text{ et } n < 20, \\ 4n + 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 2.** Donner la négation mathématique des assertions suivantes

1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.
2. Certains nombres entiers sont pairs.
3. Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.

**Exercice 3.** Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $x^2 + x - 12 = 0$ ,
2.  $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ ,
3.  $|y^2 - 2y| = 1$ .

**Exercice 4.** Résoudre les inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $(3x - 1)(6 - 4x) < 0$ ,
2.  $-2x^2 - 4x + 16 > 0$ ,
3.  $\frac{3x - 2}{x - 1} < 1$ .

**Exercice 5.** Pour tout nombre réel  $m$ , on cherche à déterminer le nombre de racines réelles du polynôme  $P_m$  défini sur  $\mathbb{R}$  par

$$P_m(x) = (m + 2)x^2 + 2(2m + 1)x + m + 2.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de  $m$  le polynôme  $P_m$  est-il de degré 1 ? On suppose dans la suite que  $m$  est différent de cette valeur.
2. Calculer le discriminant  $\Delta_m$  de  $P_m$  en fonction de  $m$ .
3. Étudier le signe de  $\Delta_m$  en fonction de  $m$ .
4. Conclure quant au nombre de racines réelles de  $P_m$  en fonction de  $m$ .

**Exercice 6.** On considère les nombres réels  $u = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$  et  $v = -\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ . Le but de l'exercice est de déterminer des expressions plus simples de  $u$  et  $v$ .

1. (a) Justifier que  $u$  et  $v$  sont bien définis.  
(b) Calculer  $u^3 + v^3$ .  
(c) Montrer que  $uv = -1$ .  
(d) Développer puis simplifier  $(u + v)^3$ .
2. On pose  $\alpha = u + v$  et on considère le polynôme

$$P(x) = x^3 + 3x - 4.$$

- (a) Dédire des questions précédentes que  $\alpha$  est racine de  $P$ , c'est-à-dire que  $P(\alpha) = 0$ .
- (b) Déterminer trois nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

- (c) En déduire les solutions de l'équation  $P(x) = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .
- (d) En déduire que  $\alpha = 1$ .
3. On considère maintenant le polynôme

$$Q(x) = (x - u)(x - v).$$

- (a) Développer l'expression de  $Q(x)$  et en déduire une expression simple de ce polynôme.
- (b) En déduire des expressions plus simples de  $u$  et de  $v$ .