TD$_5$ Suites usuelles

1 Suites arithmétiques, suites géométriques

Exercice 1 (∞∞)
Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

1. la suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 3$,
2. la suite géométrique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 3$,

Exercice 2 (●∞)
Soit (u_n) une suite ne s'annulant pas et vérifiant la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}.$$

Montrer que la suite $(1/u_n)$ est arithmétique et donner sa raison.

Exercice 3 (●∞)
On place 1000 euros sur un compte rémunéré au taux de 2%. Quel est le capital présent sur le compte après 10 ans ?

2 Les suites arithmético-géométriques

Exercice 4 (●∞)
Déterminer l'expression du terme général de la suite donnée par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$$

et $u_0 = 3$.

Exercice 5 (●∞)
Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 3$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

1. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
2. Déterminer la limite de (u_n) quand $n \to \infty$.

Exercice 6 (●∞)
Etudier la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_2 = 1$ et pour tout $n \geq 2$,

$$u_{n+1} = -0.2u_n + 2.$$

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 7 (●○○)
On considère une suite (u_n) vérifiant $u_0 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$4u_{n+1} + u_n = 2.$$

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 8 (●●○)
Dans une réserve naturelle, on surveille le nombre d'individus d'une espèce animale. Une population initiale de 1000 individus évolue ainsi : chaque année, 20% des individus disparaissent, et 120 individus sont introduits.

1. Décrire l'évolution de la population au bout de n années, en fonction de n (on note p_n la population au bout de n années).
2. Déterminer la valeur $n_0 \in \mathbb{N}$ au delà de laquelle la population p_n est inférieure à 800.

Exercice 9 (●●○)
Un problème posé par Léonard Fibonacci est le suivant : un marchand part de Pise pour Lucques où il réussit à doubler son capital ; il paie ensuite ses frais de voyage 12 deniers. Puis il va à Florence où il réussit à doubler son capital. Il paie ses frais de voyage 12 deniers et il revient à Pise où il recommence une troisième fois l'opération : doublement de son capital, paiement des frais. Il constate alors que sa bourse est vide. Quel était son avoir initial ?

3 Les suites récurrentes doubles, et au-delà

Exercice 10 (●○○)
Exprimer u_n lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

1. la suite vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n,$$
2. la suite vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0,$$
3. la suite vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n,$$
4. la suite vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

   Reconnaissez-vous cette suite ?

Exercice 11 (●●●)
Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est correctement définie, et que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. Que dire de la suite (v_n) de terme général $v_n = \ln u_n$?
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 12 (●●●)
Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^4}{u_n^3}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est correctement définie, et que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. Que dire de la suite (v_n) de terme général $v_n = \ln u_n$?
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 13 (●●○)
Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 = u_1 = 1$ et la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 4.$$

1. Déterminer une suite (l) constante satisfaisant la relation de récurrence ci-dessus.
2. Que dire de la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - l$?
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.