Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1A – Année 2023/2024
M. Marmorat

DS 2 – Mathématiques

Mercredi 11 Octobre 2023

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à *encadrer*, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de trois exercices et d'un problème, qui mêlent question d'informatique et de mathématiques.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

1. Montrer, en utilisant trois raisonnements par récurrence distincts, que :
   (a) Les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont correctement définis et strictement positifs.
   (b) La suite (u_n) est strictement croissante (on rappelle que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$).
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$.
2. (Informatique) Implémenter une fonction Python `suite` qui prend en argument un entier n et qui renvoie la valeur du n-ème terme de la suite (on utilisera une boucle `for`).
3. (Informatique) Implémenter une fonction Python `somme` qui prend en argument un entier n et qui renvoie la quantité
$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Exercice 2. Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

1. $\cos(2x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,
2. $\sin(3x) = \sin(2x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,
3. $\cos^2(x) - \cos(x) - 2 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. $\cos(2x) + \sin(2x) = 1$ d'inconnue $x \in [0, 2\pi]$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{n\,(u_n - 2)}{u_n + 3n + 1}$.
On définit également la suite (t_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t_n = \dfrac{n}{u_n + 1}$.
On *admet* que ces suites sont bien définies.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t_{n+1} = 3t_n + 1$.
3. En déduire l'expression de t_n puis de u_n en fonction de n.

Problème : Un modèle de dynamique des populations

La dynamique des populations consiste à étudier l'évolution du nombre d'individus d'une population au cours du temps. Un premier modèle consiste à supposer que le temps est un entier positif n (correspondant par exemple à un nombre d'années) et que le taux de croissance d'une population est un réel $a > 0$ fixé.

Autrement dit, si x_n est le nombre d'individus au temps n, on a $x_{n+1} = ax_n$. On constate alors que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.

Par exemple, on cherche à déterminer le nombre de cellules x_n après n heures sachant qu'une cellule se divise en deux toutes les heures. En supposant qu'il y ait au temps 0 une seule cellule et que l'on soit dans des conditions optimales, on constate alors que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 2x_n$. Autrement dit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2^n$, et le taux de croissance est ici de 2.

Mais ce modèle comporte de nombreux inconvénients, l'un d'entre eux étant qu'il suppose que tous les individus de la population étudiée se reproduisent de la même manière. Une façon de raffiner ce modèle est alors de partager la population en plusieurs classes suivant certains facteurs (par exemple l'âge). En faisant des hypothèses sur la croissance de la population (ici linéaire), il est alors possible d'obtenir des prévisions plus précises dans le développement de la population étudiée.

1 Exemple : un modèle de développement cellulaire

Dans cette partie, on suppose qu'il existe deux types de cellule : les cellules matures et les cellules immatures.

- Si au temps n une cellule est immature, alors elle devient mature au temps $n + 1$.
- Si au temps n une cellule est mature, alors elle se divise en deux cellules au temps $n + 1$, l'une mature et l'autre immature.

En notant x_n et y_n respectivement le nombre de cellules matures et le nombre de cellules immatures au temps $n \in \mathbb{N}$, on constante que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n, \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

avec x_0 et $y_0 \in \mathbb{N}$.

1. (Informatique) Écrire une fonction Python `suite(n,x0,y0)` qui prend en argument un entier n, le premier terme x_0 et le premier terme y_0 et qui renvoie la valeur du couple (x_n, y_n).
   On rappelle qu'en Python, une fonction peut renvoyer un couple de valeurs (a, b) grâce à l'instruction `return a,b`.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.
3. On suppose qu'au temps 0, il y a uniquement une cellule immature et aucune cellule mature. Exprimer x_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

2 Un modèle général et une application

Dans cette partie, on présente le modèle d'une population structurée en deux classes de manière générique. On appliquera alors ce modèle à un problème issu de la biologie.

On considère deux populations $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, données par leur premier terme x_0 et y_0 et évoluant de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n, \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases} \tag{E}$$

où a, b, c et d sont des paramètres réels. Par exemple, pour la population de cellules étudiées dans la partie 1 on a deux classes, l'une correspondant aux cellules matures et l'autre aux cellules immatures. Les paramètres ont dans ce contexte la signification biologique suivante :

- $a = 1$ est la proportion de cellules matures restant matures entre deux temps consécutifs ;
- $b = 1$ est la proportion de cellules immatures devenant matures entre deux temps consécutifs ;
- $c = 1$ est le nombre de cellules immatures obtenues par division d'une cellule mature ;
- $d = 0$ car les cellules immatures ne se divisent pas.

2.1 Étude du modèle général

4. (Informatique) Écrire une fonction Python `suite(n,a,b,c,d,x0,y0)` qui prend en argument un entier n, 4 paramètres a, b, c et d, le premier terme x_0 et le premier terme y_0 et qui renvoie la valeur du couple (x_n, y_n).
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = (a+d)x_{n+1} + (bc-ad)x_n$.
   Indication : on pourra montrer dans un premier temps que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $bdy_n = dx_{n+1} - adx_n$.
6. De manière similaire, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+2} = (a+d)y_{n+1} + (bc-ad)y_n$.
7. Réciproquement, on suppose que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = (a+d)x_{n+1} + (bc-ad)x_n \quad \text{et} \quad y_{n+2} = (a+d)y_{n+1} + (bc-ad)y_n,$$
   avec comme conditions initiales $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et $x_1 = ax_0 + by_0$ et $y_1 = cx_0 + dy_0$. Montrer, en utilisant le principe de récurrence double, que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient le système (E).
8. On suppose que $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_n en fonction des autres paramètres.

2.2 Un modèle tue-mouche

On place dans un même espace confiné deux espèces de mouches, Drosophila simulans et Drosophila melanogaster. On suppose que leur taux de croissance est identique et est de $a > 0$, qu'une D. melanogaster élimine systématiquement $b > 0$ D. simulans entre les instants n et $n+1$. On note respectivement $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de populations de D. simulans et de D. melanogaster. On suppose que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

9. Déterminer les relations de récurrence vérifiées par les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
10. Exprimer x_n et y_n en fonction de a, b, x_0 et y_0 et $n \in \mathbb{N}$.
11. En déduire que la population de D. simulans disparaît à partir d'un certain instant n_0 que l'on exprimera en fonction de a, b, x_0 et y_0.

3 Une population structurée en 3 classes

On étudie l'évolution d'une population d'insectes que l'on partage en trois classes d'âges : les larves, les insectes adultes et les insectes âgés. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note respectivement x_n, y_n et z_n le nombre de larves, adultes et d'insectes âgés au temps n.

On suppose que l'évolution de ces populations obéit aux relations de récurrences

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 80y_n, \\ y_{n+1} = \frac{1}{20}x_n, \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}y_n. \end{cases}$$

12. Donner une interprétation biologique des coefficients 80, $1/20$ et $1/2$ dans ce contexte.
13. (Informatique) Ecrire une fonction `population(n)` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la population totale d'insectes à l'instant n.
14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = 4x_n$. Interpréter.
15. On suppose qu'à l'instant initial $n = 0$, il y a 100 larves et aucun insecte adulte ou âgé. Déterminer la population totale d'insectes en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
16. Ce modèle vous paraît-il adapté pour décrire une population d'insectes ?