TD$_7$ Sommes et produits

1 Sommes

Exercice 1 (●○○)
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a \in \mathbb{R}$, calculer les sommes suivantes

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k$,
2. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} a$,
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3(a^k+1)$,
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3a^{k+1}$,
5. $\displaystyle\sum_{k=-n}^{0} k$,
6. $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} (2k+1)$,
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+2)$,
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)$.

Exercice 2 (●○○)
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a \in \mathbb{R}$, calculer les sommes suivantes

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 5$,
2. $\displaystyle\sum_{k=-2}^{7} (-1)$,
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{2k}$,
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^{2k+1}$,
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$,
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k$,
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} n^k$,

Exercice 3 (●●○)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, et la quantité

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1).$$

Remarquez que S_n est la somme des n premiers nombres impairs.

1. Calculez à la main S_1, S_2, S_3 et S_4.
2. Calculer S_n en utilisant la linéarité de la somme.
3. Modifiez et adaptez le schéma suivant pour réaliser une « preuve sans mots » du résultat précédent.

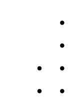

FIGURE 1 – Vers une preuve sans mots ?

4. Proposez deux autres démonstrations du résultat :
   (a) En considérant

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} 2k.$$

(b) En effectuant une preuve par récurrence.

Exercice 4 (●○○)
Remplacer le ? par sa valeur dans les égalités suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_k = \sum_{k=?}^{?} j a_?$,
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+3} a_{k-1} = \sum_{k=?}^{?} a_?$,
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} = \sum_{j=?}^{?} a_j$,
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k+1} = \sum_{j=?}^{?} a_j$.

Exercice 5 (●●○)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$.
2. En déduire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}.$$

Exercice 6 (●●○)
Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a^k$.

1. Calculer S_n lorsque $a = 1$.
2. Si $a \neq 1$, calculer $aS_n - S_n$ et en déduire la valeur de S_n.

2 Produits

Exercice 7 (●○○)
Calculer les produits suivants

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{10} k^2$,
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2\sqrt{k}k$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+3}$,
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$,
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a^k$.

Exercice 8 (●●○)
Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Exercice 9 (●○○)
Simplifier en utiliser la notation factorielle

1. $6 \times 5 \times 4 \times 3$,
2. $\dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{6 \times 5 \times 4}$,
3. $n(n-1)(2n+2)$,

Exercice 10 (●●○)
Simplifier en utiliser les notations factorielle et puissance

1. $2n \times (2n-2) \times (2n-4) \times \cdots \times 2$,
2. $(2n-1) \times (2n-3) \times (2n-5) \times \cdots \times 1$.

Exercice 11 (●●○)
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -2(n+1)u_n.$$

Exprimer simplement u_n en fonction de n, sans utiliser le signe $\prod$.

3 Coefficients binomiaux, binôme de Newton

Exercice 12 (○○○)
Calculer les expressions suivantes :

1. $\binom{10}{9}$,
2. $\binom{8}{2}$,
3. $\binom{21}{21}$,
4. $\binom{50}{48}$.

Exercice 13 (●○○)
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, développer à l'aide du triangle de Pascal

1. $(1+x)^5$,
2. $(1-x)^6$,
3. $(x-y)^4$.

Exercice 14 (●○○)
Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k}$,
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^k}$,
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}}$.

4 Sommes trigonométriques

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a la relation

$$e^{ikx} = (e^{ix})^k,$$

et que de plus

$$\cos(kx) + i\sin(kx) = e^{ikx}.$$

Exercice 15 (●●●)
Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

Indication : on pourra avantageusement calculer la somme $S_n + iT_n$.

Exercice 16 (●●●)
Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx).$$

Indication : on pourra avantageusement calculer la somme $S_n + iT_n$, et identifier une somme géométrique.

Exercice 17 (●●○)
Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes

$$C = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx).$$

Indication : on pourra avantageusement calculer les sommes $C+S$ et $C-S$.