Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1A – Année 2023/2024
M. Marmorat

DS 3 – Mathématiques

Mercredi 15 Novembre 2023

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à $\boxed{\textit{encadrer}}$, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de cinq exercices de mathématiques.

Exercice 1 (Questions de cours).

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer $z + \overline{z}$ et $z - \overline{z}$ en fonction de Re(z) et Im(z).
2. Rappeler la formule de De Moivre. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 2\sqrt{3} + 2i$.
4. Soit $x \in]-\pi, \pi]$. Mettre le nombre complexe $z = 1 + e^{ix}$ sous forme exponentielle.

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de la somme de Gauss et de la première somme d'Euler
$$\sum_{k=0}^{n} k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2.$$
2. La classe de BCPST1A possède 43 élèves. Lorsqu'il corrige les copies de DS rendues par sa classe, le professeur de mathématiques met 10 minutes pour corriger la première copie. Puis la fatigue aidant, il augmente la durée de correction de 1 minutes par copie : ainsi il mettra 11 minutes à corriger la deuxième copie, 12 pour corriger la troisième, 13 pour la quatrième, ..., 50 minutes pour la 41 ème copie, 51 pour la 42 ème et enfin 52 pour la 43 ème copie.
   (a) Quelle est la nature de la progression des temps de correction de copie par M. Marmorat ?
   (b) Calculer la durée totale qu'il faudra au professeur de mathématiques pour corriger le paquet de copies de sa classe. On donnera le résultat en minutes.

Exercice 3.

1. Résoudre l'équation
$$z^2 + z + 1 = 0 \tag{1}$$
d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Justifier que l'équation (1) possède deux racines distinctes et conjuguées. On note j l'unique solution de (1) de partie imaginaire positive.
2. Donner le module et l'argument principal de j.
3. En faisant le moins de calculs possibles, montrer que $j^3 = 1$.
4. Montrer que $j^2 = \overline{j}$.

Exercice 4. Dans cet exercice on cherche à résoudre l'équation
$$z^2 - 2iz + \sqrt{3}i = 0 \tag{2}$$
d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Il s'agit d'une équation du second degré, à coefficients complexes. La méthode vue en cours ne s'applique donc pas directement.

1. On note $\delta = -1 - i\sqrt{3}$. Mettre δ sous forme exponentielle.
2. Justifier que δ possède deux racines complexes notées α et β que l'on explicitera.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est solution de l'équation (2) si et seulement si
$$(z-i)^2 = \delta.$$
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (2), que l'on exprimera en fonction de α et β.

Exercice 5. Dans cet exercice, on étudie de 3 façons différentes la suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = 2$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = iz_n + 3 - i. \tag{3}$$

1. *En revenant aux suites réelles.*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \mathrm{Re}\,(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}\,(z_n)$ ainsi que $a_n = x_n - 2$.
Ainsi, on a notamment
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = x_n + iy_n \quad \text{et} \quad z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}.$$
   (a) A l'aide de la relation de récurrence (3), et en procédant à l'identification des parties réelles et imaginaires, exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n, pour $n \in \mathbb{N}$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+2} = -a_n.$$
   (c) Calculer a_0 et a_1, et en déduire l'expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (d) En déduire l'expression de x_n puis de y_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ puis que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = 2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$
2. *En s'inspirant des suites arithmético-géométriques.*
   (a) Résoudre l'équation $z = iz + 3 - i$, on note l son unique solution.
   (b) Que peut-on dire de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = z_n - l$?
   (c) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = 2 + i - i^{n+1},$$
   puis retrouver le résultat de la question 1.(c).
3. *Géométriquement.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n le point d'affixe z_n.
   (a) Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe.
   (b) Si M est un point d'affixe z, quelle transformation géométrique transforme M en le point d'affixe iz ? en le point d'affixe $iz + 3 - i$?
   (c) Que peut-on dire de M_n et M_{n+4} pour tout $n \in \mathbb{N}$?
   (d) Retrouver le résultat de la question 3.(c) en utilisant la formule de la question 1.(c).