TD_8 Fonctions usuelles

1 Ensembles de définitions

Exercice 1 (○○○)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$. Déterminer les ensembles de définition et les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2 (○○○)
On définit deux fonctions f et g par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ et $g(x) = x^2$.

1. Donner les ensembles de définition de f et g.
2. Déterminer les domaines de définition et expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. Calculer l'image de $3x$ par f et l'image de x^3 par g.

Exercice 3 (●○○)
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+4x+12}$
2. $g(x) = \sin\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$
3. $h(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{(\tan^2 x) + 1}$
4. $u(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2 - x - 2}$
5. $v(x) = \cos\left(x\left(\sqrt{\ln x} + 1\right)\right)$
6. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$
7. $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
8. $h(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{2x-3}\right)$
9. $u(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{e^x - 1}$
10. $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$
11. $g(x) = \sqrt{\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}}$
12. $h(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$
13. $f(x) = \ln|x - 2|$
14. $g(x) = \ln|e^x - e^{-x} + 2|$
15. $h(x) = \ln\left(|\cos x|^3\right)$
16. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^x - 1}{x^x + 1}\right)$
17. $g(x) = (x^2 + x + 1)^{\ln x}$

2 Réduction d'intervalle d'étude

Exercice 4 (●○○)
Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner leurs domaines de définition et les éventuelles symétries ou périodicité vérifiées par chacune d'entre elles.

1. $f(x) = \tan^2(x) + \cos(2x)$
2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
3. $h(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$
4. $u(x) = \dfrac{\tan x}{x^3 + x}$

Exercice 5 (●●○)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
Montrer que f est 1-périodique. Tracer alors les graphes de f et de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)^2$.

3 Résolution d'inéquations

Exercice 6 (●●○)
Résoudre les inéquations suivantes (on étudiera les domaines de validité) :

1. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} < 0$
2. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}} < 1$
3. $x < \sqrt{2x+3}$
4. $\sqrt{x^2+1} - x < \dfrac{1}{2}$

4 Calcul de dérivées

Exercice 7 (●●○)
Calculer (en justifiant l'ensemble de dérivation) la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x+1)^2$
2. $g(x) = \cos(x^2+1)$
3. $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
4. $f(x) = (\sqrt{x}+1)^{\ln x}$
5. $g(x) = (x+1)^{\cos x}$
6. $h(x) = (1+x+x^2)^{x+x^2}$

5 Tracé de graphes

Exercice 8 (●○○)
Tracer le graphe des fonctions suivantes, sans calculette évidemment :

1. $x \mapsto \ln(-x)$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x+3} - 2$
3. $x \mapsto -\ln(x+1)$
4. $x \mapsto \dfrac{1}{2}\sqrt{x-2} + 1$
5. $x \mapsto 2\sqrt{5-x}$
6. $x \mapsto e^{|x|}$

6 Etude de fonctions

Exercice 9 (●●○)
Étudier les fonctions suivantes et tracer l'allure de leur courbe représentative :

1. $x \mapsto x^3 - 3x + 2$
2. $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
3. $x \mapsto \ln(-2x^2 + x + 1)$

Exercice 10 (●●○)
On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \cos(3x)\cos^3(x)$.

1. Montrer que φ est paire et π périodique. Sur quelle intervalle I peut-on se contenter d'étudier φ ?
2. Montrer que pour tout $x \in I$, $\varphi'(x)$ est du signe de $-\sin(4x)$.
3. En déduire le signe de φ' sur I puis le tableau de variations de φ sur I.
4. Tracer la courbe représentative de φ.

Exercice 11 (●●○)
Montrer par étude de fonctions que

1. $\forall x > 0,\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2.$
2. $\forall x \geq 0,\ \sqrt{1+x} \geq 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}.$
3. $\forall x \geq 0,\ \sin(x) \leq x.$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}.$

Exercice 12 (●●●)

1. Montrer que
$$\forall\, x > 1, \quad \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \leq \ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

2. En déduire un encadrement de
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$$
pour tout entier $n \geq 2$, ainsi qu'un encadrement de
$$T_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

3. Déterminer la limite de S_n et de T_n lorsque $n \to \infty$.