Chapitre 9

Les ensembles

Sommaire

Dans ce chapitre, nous introduisons des éléments de vocabulaire, de calcul et de logique autour des ensembles mathématiques.

9.1 Vocabulaire

9.1.1 Rappel : les ensembles de nombres

- $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres entiers naturels, 0,1,2,3,...,47,...,
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs,
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels,
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Remarque 9.1 (Exposants $+$, $-$, $\star$). On note

9.1.2 Appartenance et inclusion

Définition 9.1.
- Un ensemble E est une collection d'objets distincts, appelés éléments de E.
- Un singleton est un ensemble à un seul élément : $\{a\}$.
- L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé l'ensemble vide et noté $\emptyset$.

Remarque 9.2. Il y a deux manières de définir un ensemble : en extension et en compréhension.

1. Définir un ensemble en extension, c'est donner la liste complète des éléments qui le composent.
2. Définir un ensemble en compréhension, c'est le décrire comme l'ensemble des éléments qui vérifient une certaine propriété.

Exemple 9.1. Les ensembles $\{1, 2, 3\}$ et $\{2^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ sont définis en extension. Les ensembles $\{x \in \mathbb{R} \ /\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ x = 2^n\}$ et $\{x \in \mathbb{R} \ /\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x = y^2\}$ sont définis en compréhension.

Définition 9.2 (Appartenance d'un élément à un ensemble)**.** Soit E un ensemble et soit a un élément de E. On dit que a appartient à E et on note $a \in E$. Pour signifier que x n'est pas un élément de E, on note $x \notin E$.

Définition 9.3 (Inclusion)**.** Soient E et F deux ensembles. On dit que F est inclus dans E et on note $F \subset E$ si tout élément de F est élément de E, c'est-à-dire si

$$\forall\, x, \quad (x \in F \Longrightarrow x \in E).$$

Dans ce cas, on dit aussi que F est un sous-ensemble de E ou que F est une partie de E.

Si F n'est pas inclus dans E, on note $F \not\subset E$. Ceci signifie

$$\exists\, x \in F \ /\ x \notin E.$$

Méthode 9.1: Montrer une inclusion

Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un autre ensemble B, on procède et on rédige en général de la manière suivante :
Soit $x \in A$.
$\vdots$
Donc $x \in B$.
Donc $A \subset B$.

Exemple 9.2. Soit $A = \{2^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des puissances de 2 et $B = \{2p,\ p \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des nombres pairs. Montrons que $A \subset B$.

Propriété 9.1. *Soit E un ensemble. On a toujours $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$.*

Propriété 9.2. *Soient A, B et E trois ensembles. Si $A \subset B$ et $B \subset E$ alors $A \subset E$.*

Définition 9.4 (Egalité)**.** Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont égaux, noté $E = F$ si E et F ont exactement les mêmes éléments, autrement dit si

$$\forall x, \quad (x \in F \Longleftrightarrow x \in E).$$

Propriété 9.3 (Double inclusion)**.** *Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont égaux, et note $E = F$ si et seulement si E est inclus dans F et si F est inclus dans E, autrement dit*

$$E = F \Longleftrightarrow (E \subset F \quad \text{et} \quad F \subset E).$$

Méthode 9.2: Montrer une égalité d'ensemble par double inclusion

Très souvent, pour montrer que 2 ensembles E et F sont égaux on procède par double inclusion : on montre que $E \subset F$ et que $F \subset E$.
L'égalité correspond à une équivalence et chaque inclusion traduit une implication.

Exemple 9.3. Soit $E = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 6x + 5 \leq 0\}$ et $F = [1, 5]$. Montrons que $E = F$.

Définition 9.5 (Ensemble des parties)**.** Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$; autrement dit $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E.

Ainsi, pour tout ensemble A,

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E.$$

Exemple 9.4.

- Si $E = \{5, 8\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{5\}, \{8\}, E\}$.
- Si $E = \{0, 1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) =$

Remarque 9.3.

- $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles (autrement dit les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont des ensembles).
- Pour tout ensemble E, $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.
- Attention : si $a \in E$, alors on a pas $a \in \mathcal{P}(E)$. Parcontre, on a $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$.

9.2 Opération sur les ensembles

On introduit les opérations de réunion, d'intersection et de passage au complémentaire.

Définition 9.6 (Réunion)**.** Soient E et F deux ensembles. On appelle réunion (ou union) de E et F, et on note $E \cup F$ l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent soit à E soit à F :

$$E \cup F = \{x \text{ tel que } x \in E \textbf{ ou } x \in F\}.$$

Définition 9.7 (Intersection)**.** Soient E et F deux ensembles. On appelle intersection de E et F, et on note $E \cap F$ l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à E et à F :

$$E \cap F = \{x \text{ tel que } x \in E \textbf{ et } x \in F\}.$$

Exemple 9.5.

- $\{4, 5, 8\} \cup \{6, 7, 9\} =$
- $]-4, 20] \cap [10, 19] =$
- Si A et B sont deux ensembles, on a les relations suivantes :

$\diamond$ $A \subset A \cup B$ $\diamond$ $A \cap B \subset A$ $\diamond$ $A \cap B \subset A \cup B$

Exercice 9.1. Soient A et B deux ensembles telles que $A \cup B = A \cap B$. Montrer que $A = B$.

Définition 9.8 (Ensembles disjoints)**.** Deux ensembles E et F sont dits disjoints s'ils ne possèdent aucun élément en commun, autrement dit si

$$E \cap F = \emptyset.$$

Exemple 9.6. Par exemple

Définition 9.9 (Complémentaire)**.** On appelle complémentaire de F dans E, et on note $E \setminus F$ ou F^c ou encore $\overline{F}$ l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas des éléments de F :

$$E \setminus F = \{x \in E \ / \ x \notin F\}.$$

Exemple 9.7.

- $\{10, 11, 12, 13, 15\} \setminus \{11, 13\} =$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^- =$
- $\mathbb{N}^\star =$

Propriété 9.4 (Involutivité du complémentaire)**.** *Soit $A \subset E$. Alors $\overline{\overline{A}} = A$. On dit que le passage au complémentaire est involutif.*

Théorème 9.1 (Complémentaire d'une réunion, d'une intersection)
Soient A et B des sous-ensembles d'un ensemble E. Alors

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \textit{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Théorème 9.2
L'intersection est distributive sur la réunion et la réunion est distributive sur l'intersection. Autrement dit, si E est un ensemble et A, B et C sont trois sous-ensembles de E alors

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

9.3 Produit cartésien

Définition 9.10. Soit E et F deux ensembles. On définit le produit cartésien $E \times F$, noté $E \times F$ (et lu « E croix F ») comme l'ensemble des couples formés d'un élément de E puis d'un élément de F. C'est-à-dire

$$E \times F = \{(x, y) \ , \ x \in E \ , \ y \in F\}$$

Si $E = F$ on note $E \times E = E^2$

Remarque 9.4.

- L'ordre est important, en général $E \times F$ est différent de $F \times E$.
- Il ne faut pas confondre le couple (x, y) et l'ensemble $\{x, y\}$.
- La notation E^2 se généralise à $E^n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$
- On appelle les éléments de E^2 des *paires*, les éléments de E_3 des *triplets* et, pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle les éléments de E^n des n*-listes* ou des n*-uplets*.

Exemple 9.8.

- $\{0, 1\}^2 =$
- Jeu de cartes : si $E = \{$As, Roi, Dame, Valet, $10, 9, \ldots, 3, 2\}$ représente l'ensemble des valeurs possibles du jeu de carte et $F = \{$ Pique, Coeur, Carreau, Trèfle $\}$ représente l'ensemble des couleurs possibles du jeu de carte alors
  $E \times F =$

- Produit cartésien de trois intervalles :

- $\mathbb{R}^2 =$

- $\mathbb{R}^3 =$