Chapitre 10

Différents types de raisonnements

Sommaire

Dans ce chapitre, nous étudions différentes façons de *raisonner* mathématiquement, c'est-à-dire de prouver des assertions mathématiques. Nous avons déjà étudié le raisonnement par récurrence cette année, que nous rappelons ici. Nous étudions les raisonnements par contraposition, les raisonnements par l'absurde et enfin les raisonnements par analyse-synthèse.

10.1 Raisonnement par récurrence

Nous introduisons le raisonnement par récurrence, qui est un type de raisonnement qui permet de démontrer des propriétés sur des nombres entiers successifs. Cette méthode de raisonnement s'appuie sur le théorème suivant, qui repose sur les propriétés de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Théorème 10.1: Principe de récurrence simple

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Soit un entier $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n_0)$ est vraie et si pour tout entier $n \geq n_0$ l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple 10.1. Montrons en utilisant le principe de récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le nombre $13^n - 4^n$ est un multiple de 9. Notons $P(n)$ la propriété

$$P(n) : \quad 13^n - 4^n \quad \text{est un multiple de 9.}$$

— **Etape d'initialisation :** La propriété $P(0)$ énonce que $13^0 - 4^0 = 1 - 1 = 0$ est un multiple de 9, ce qui est vrai car $0 = 9 \times 0$. Ainsi $P(0)$ est vraie.

— **Etape d'hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété $P(n)$ soit vraie et montrons que $P(n+1)$ est alors vraie également. Autrement dit, on suppose que $13^n - 4^n$ est un multiple de 9 et l'on cherche à démontrer que $13^{n+1} - 4^{n+1}$ est également un multiple de 9.

On a l'égalité

$$\begin{aligned} 13^{n+1} - 4^{n+1} &= 13 \times 13^n - 4 \times 4^n \\ &= (9+4) \times 13^n - 4 \times 4^n \\ &= 9 \times 13^n + 4(13^n - 4^n). \end{aligned}$$

Or le terme 9×13^n est multiple de 9 par définition, tandis que $13^n - 4^n$ est également multiple de 9 par hypothèse (on a supposé que $P(n)$ était vraie). Ainsi $13^{n+1} - 4^{n+1}$ est la somme de multiple de 9, donc est également multiple de 9. La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.

On a ainsi montré l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Pour conclure, nous avons montré que $P(0)$ est vraie (initialisation) et que pour tout entier n, l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité). D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10.1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $2^n \geq 4n$.

Exercice 10.2. Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 10.3. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$. Noter que la propriété est vraie pour $n \leq 2$, héréditaire dès $n = 3$ mais fausse pour $n = 3$.

Parfois, l'initialisation d'une seule variable ne suffit pas, notamment lorsque la propriété au rang $n+1$ dépend de la propriété aux rangs n et $n-1$. On utilise alors le principe de récurrence double.

Théorème 10.2 (Principe de récurrence double)
Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Soit un entier $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies et si pour tout entier $n \geq n_0$ l'implication $(P(n)$ et $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exercice 10.4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n.$$

Remarque 10.1. On peut de manière générale effectuer des récurrences d'ordre $k \geq 1$, pour tout entier naturel k.

Enfin, on peut effectuer un raisonnement par récurrence forte :

Théorème 10.3 (Principe de récurrence forte)
Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Soit un entier $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n_0)$ est vraie et si pour tout entier $n \geq n_0$ l'implication $(\forall\, k \leq n,\ P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exercice 10.5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $x_n = 2^{n-1}$.

10.2 Raisonnement par contraposée

Nous étudions ici le raisonnement par contraposée, aussi appelé raisonnement par contraposition. Supposons, P et Q étant deux propositions mathématiques, que l'on cherche à montrer l'implication $P \Rightarrow Q$, c'est-à-dire que sous l'hypothèse P, la proposition Q est vraie. On sait que cette implication est équivalente à $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$, c'est-à-dire qu'il est équivalent de démontrer la **contraposée**, ce qui peut s'avérer bien plus aisé !

Exemple 10.2. Montrons l'implication suivante : pour tout entier naturel n, si n^2 est pair alors n est pair. Raisonnons par contraposée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que n est impair et montrons que n^2 est impair. Comme n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Ainsi $n^2 = 4k^2 + 2k + 1$, autrement dit $n^2 = 2(2k^2 + k) + 1$, donc n^2 est impair.

Nous avons montré la contraposée de l'implication initiale : si n est impair, alors n^2 est impair. Par contraposition, on en déduit l'implication initiale : si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 10.6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer (en utilisant un raisonnement par contaposition) que

$$(\forall\, \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon) \Longrightarrow a = 0.$$

Exercice 10.7. Soient a et $b \in \mathbb{R}$. On considère la proposition suivante : si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b est irrationnel.

1. Quelle est la contraposée de cette proposition ?
2. Démontrer la proposition.
3. Est-ce que la réciproque de cette proposition est vraie ?

10.3 Raisonnement par l'absurde

Nous étudions ici le raisonnement par l'absurde, qui est une forme de raisonnement qui consiste, pour montrer une proposition P, à supposer que cette proposition est fausse et à en déduire une contradiction logique. C'est nécessairement que la proposition ne peut-pas être fausse, c'est donc que la proposition est vraie.

La démonstration qui suit est l'archétype de la démonstration par l'absurde.

Propriété 10.1 (Irrationalité de $\sqrt{2}$)**.** *$\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Exercice 10.8. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 10.9 (Principe des tiroirs). Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que si vous possédez plus de $(n+1)$ paires de chaussettes et n tiroirs, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 pairs de chaussettes.

10.4 Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est un type de raisonnement qui permet de montrer l'existence et l'unicité d'un objet vérifiant certaines propriétés. Par exemple, supposons qu'il nous soit demandé de démontrer une propriété du type : « il existe un unique $x \in E$ tel que la propriété $P(x)$ est vraie ».

Un raisonnement par analyse-synthèse se décompose en deux étapes :

1. **L'analyse :** On suppose que l'objet $x \in E$ vérifiant $P(x)$ existe bel et bien, et on effectue un calcul ou un raisonnement qui va nous permettre d'établir des conditions nécessaires vérifiées par x et de l'identifier précisément. On montre que si x existe, alors il est nécessairement égal à un certain $x_0 \in E$. Ceci montre l'unicité.
2. **La synthèse :** On considère l'élément x_0 identifié dans la phase d'analyse, et on montre que la propriété $P(x_0)$ est vraie. Ceci assure l'existence.

En conclusion, on a ainsi montré que l'élément $x_0 \in E$ est l'unique élément x de E vérifiant $P(x)$. Illustrons tout ceci sur un exemple.

Exemple 10.3: Raisonnement par analyse-synthèse

Montrons que l'équation
$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x}=3, \quad x \geq 3 \tag{$\star$}$$
possède une unique solution. Raisonnons par analyse-synthèse.

1. **L'analyse :** Supposons qu'un tel $x \geq 3$ existe, c'est-à-dire que
$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x}=3.$$
En élevant au carré de part et d'autre, on obtient
$$(\sqrt{x-3}+\sqrt{x})^2 = x-3+2\sqrt{x-3}\sqrt{x}+x = 3^2 = 9,$$
soit encore
$$2x-3+2\sqrt{x-3}x = 9,$$
donc
$$\sqrt{x-3}\sqrt{x} = 6-x.$$
En élevant à nouveau au carré, on obtient que x doit vérifier
$$x^2-3x = 36-12x+x^2$$
et finalement que
$$x = 4.$$
Ainsi on a montré que si x vérifie l'équation $(\star)$, alors $x=4$. Ceci conclut la phase d'analyse.
2. **La synthèse :** Vérifions que $x=4$ est solution de $(\star)$. On a
$$\sqrt{4-3}+\sqrt{4} = 1+2 = 3.$$
Ainsi 4 est bien solution, ceci conclut la synthèse.

En conclusion, 4 est l'unique solution de $(\star)$.

Exercice 10.10. En utilisant un raisonnement par analyse-synthèse, montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose de manière unique sous la forme $f = g + h$ où g et h sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, respectivement paire et impaire.